

Numerische Simulation der Schiffsumströmung mit Berücksichtigung des Propellersogs

**Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau der
Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades**

DOKTOR-INGENIEUR

genehmigte Dissertation

von

Norbert Stuntz

aus

Bad Ems

**Referent: Prof. Dr.-Ing. Dieter Hänel
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Som Deo Sharma**

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juni 2006

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Verbrennung und Gasdynamik, am Institut für Schiffstechnik der Gerhard-Mercator Universität Duisburg sowie am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart. Die korrespondierenden Schiffsmodellversuche und ergänzende Berechnungen wurden im Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme, Duisburg durchgeführt.

Für die Unterstützung während meiner Tätigkeit und die von allen Seiten zugetragene Hilfestellungen zum Verfassen der Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor D. Hänel und Herrn Professor S. D. Sharma für die kontinuierliche Betreuung und Förderung der Arbeit sowie der gewährten wissenschaftlichen Betätigungsfreiheit.

Ebenso möchte ich mich sehr herzlich bei meinen Kollegen am Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme und der numrax GmbH für die zahlreichen wissenschaftlichen Diskussionen, die außerordentlich wertvollen Schiffsmodellversuche und letztendlich für die ermutigenden Anregungen zum Gelingen der Arbeit bedanken.

Ein großes Dankeschön gilt meiner Familie und vielen Freunden, deren fortwährende Ermutigungen zum Abschluss dieser Arbeit beigetragen haben.

Dem Bundesministerium für Bildung und Forschung bin ich für die finanzielle Förderung zu großem Dank verpflichtet.

Duisburg, im Sommer 2006

Norbert Stuntz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Modellierung	3
2.1	Grundgleichungen reibungsfreier und reibungsbehafteter Strömungen . . .	3
2.2	Erhaltungsgleichungen inkompressibler Fluide	5
2.2.1	Ähnlichkeitsbetrachtungen	6
2.3	Lösungsansätze für die Navier-Stokes-Gleichungen	8
2.3.1	Übersicht und Motivation	8
2.3.2	Methode der künstlichen Kompressibilität	10
2.3.3	Wahl der künstlichen Schallgeschwindigkeit	12
2.4	Anfangs- und Randbedingungen	13
3	Turbulente Strömungen	17
3.1	Statistische Turbulenzmodellierung	18
3.1.1	Reynolds-gemittelte Gleichungen	18
3.1.2	Turbulenzmodellierung	20
3.1.3	Randbedingungen für die turbulenten Größen	27
4	Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen	31
4.1	Diskretisierung der räumlichen Flüsse	34
4.1.1	Diskretisierung der reibungsfreien Terme	34
4.1.2	Diskretisierung der Reibungsterme	36
4.1.3	Diskretisierung der Reynolds-gemittelten Gleichungen	37
4.2	Integration in der Zeit	38
5	Strömungen mit freier Oberfläche	41
5.1	Level-Set-Methode für freie Oberflächen	42
5.1.1	Reinitialisierung	44
5.1.2	Lokalisierung der Oberfläche	46
5.1.3	Implementierung der dynamischen Randbedingung	48
6	Modellbildung des Propellers	51
6.1	Flächenkraftmodell	52
6.1.1	Verteilung der Propellerkräfte	52
6.1.2	Realisierung auf unstrukturierten Gittern	53
6.1.3	Beispielsimulation	56

7	Gittergenerierung	57
7.1	Strukturierte Gitter	57
7.2	Unstrukturierte Gitter	59
8	Programmierplattform MOUSE	63
8.1	Bemerkungen zur objektorientierten Programmierung (OOP)	63
8.1.1	Allgemeines	63
8.1.2	Paradigmen der OOP	64
8.2	MOUSE-Bibliothek für Schiffsumströmungen	69
8.2.1	Grundsätzliche Werkzeuge	69
8.2.2	Klassenbaum für künstlich kompressible Strömung	73
8.3	Visualisierung	73
8.4	Parallelisierung	74
9	Anwendungen	77
9.1	Wahl der Berechnungsgebiete	77
9.2	Strömungssimulationen für den Wigley-Rumpf	78
9.3	Simulationen für eine Binnenschiffsgeometrie	90
9.4	Völlige Auslöschung von Schiffswellen	98
9.4.1	Motivation	98
9.4.2	Entwurf des Rumpfmodells	99
9.4.3	Modellexperiment	101
9.4.4	Numerische Nachrechnung	102
10	Zusammenfassung	107
	Literaturverzeichnis	109
	Abbildungsverzeichnis	116
	Anhang	116
A		117
A.1	Verwendete Symbole	117
A.2	Erhaltungsgleichungen in kartesischen Koordinaten	120
A.3	Erhaltungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten	121

1 Einleitung

Eines der wichtigen und zentralen Ziele in der Schiffshydrodynamik ist eine detaillierte Kenntnis des Strömungszustands des den Schiffsrumpf umgebenden Wassers. Hieraus lassen sich bereits im Projektstadium eines Neubaus vielfältige Optimierungsaufgaben beispielsweise bezüglich des Schiffswiderstands- oder der Propulsionseigenschaften ableiten.

In vielfältiger Weise werden weltweit zur Untersuchung der Schiffsumströmung Schiffsmodellversuche in Schlepptanks unterschiedlicher Spezialisierung durchgeführt, da eine rein theoretische Behandlung aufgrund der hohen Komplexität der realen, reibungsbehafteten Schiffsumströmung nicht möglich erscheint. Über die maßstäbliche Verkleinerung des Schiffsrumpfes im physikalischen Modellversuch kann allerdings in der Versuchspraxis eine vollständige dynamische Ähnlichkeit der Strömung nicht erreicht werden, so dass eine Umrechnung der Modellversuchsergebnisse auf die Großausführung mit Unsicherheiten verbunden ist und auf einen empirischen, dem Schlepptank individuell angepassten Erfahrungsschatz angewiesen ist.

Zur Überwindung der oben erwähnten Schwächen der Modellversuchstechnik wird versucht, eine möglichst allgemeingültige, theoretische Lösung mit Hilfe der numerischen Fluidodynamik zu finden. Die theoretische Basis zur Beschreibung der Strömung bildet hierfür die Formulierung der Massenerhaltung und der Impulsänderung eines inkompressiblen, Newtonschen Fluides (Navier-Stokes-Gleichungen). Die Lösung dieses zugrundeliegenden Systems partieller Differentialgleichungen kann für komplexe Strömungsvorgänge, wie bei Schiffen, numerisch erfolgen (Kapitel 2).

Die erforderliche Diskretisierung der Strömungsgleichungen erfolgt in dieser Arbeit mit einer Finiten-Volumen-Methode auf strukturierten bzw. unstrukturierten Gittern, wodurch das Erhaltungsprinzip auf die diskrete Approximation unmittelbar übertragbar wird. Die numerische Formulierung der nichtlinearen Flussanteile erfolgt mittels Upwindverfahren, die aus der Theorie kompressibler Fluide (Aerodynamik) angepasst wurden. Die Übertragung von Lösungsansätzen kompressibler Fluide auf inkompressible Strömungen erfordert hierbei eine Änderung der Integrationsstrategie in der Zeit, weshalb eine Vorkonditionierungsmethode auf der Basis künstlicher Kompressibilität eingeführt wurde. Diese Vorkonditionierung ermöglicht eine durchgehende Integration des Gleichungssystems mittels effektiver Zeitschrittverfahren bei Verwendung robuster und genauer Approximationen aus der Aerodynamik. Die kurz vorgestellten algorithmischen Details bilden die Grundlage des hier entwickelten Lösungsverfahrens der Navier-Stokes-Gleichungen (Kapitel 4).

Aufgrund der hohen Reynolds-Zahlen bei Schiffsumströmungen ist die Berücksichtigung des Einflusses der Turbulenz auf die Strömung und insbesondere auf den Wi-

derstand notwendig. Entsprechend dem Stand der Turbulenzmodellierung bei komplexen Strömungen wurden statistische Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodelle implementiert, wobei durch Verwendung des logarithmischen Wandmodells die notwendige Auflösung und somit der Rechenaufwand in Grenzen gehalten werden konnte (Kapitel 3). Eine detailliertere Turbulenzmodellierung, insbesondere im Bereich ablösender Strömungen wäre hier wünschenswert, übersteigt jedoch den Rahmen dieser Arbeit und der zur Zeit zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten.

Die für die Schiffsumströmung typische Ausbildung von freien Oberflächen und des damit verbundenen Wellenwiderstandes erfordert eine entsprechende algorithmische Berücksichtigung. In vielen hydrodynamischen Berechnungsverfahren wird ein mit der Oberfläche mitbewegtes Gitter verwendet. Dies kann jedoch bei stärkerer Auslenkung zu Verzerrungen der Gitterstruktur und somit zu größeren Verfahrensfehlern führen. Daher wird hier ein spezielles Konzept zur Verfolgung der freien Oberfläche auf einem festen Gitter eingeführt. Über eine Transportgleichung wird eine skalare Funktion, die sogenannte “Level-Set-Funktion”, bestimmt, bei der eine festgelegte Höhenlinie(-fläche) die freie Oberfläche definiert auf der die dynamische Randbedingung approximiert wird. Die Einführung dieser “Level-Set-Funktion” erlaubt auch in drei Dimensionen einen relativ einfachen Algorithmus zur Bestimmung der Wellenformationen (Kapitel 5).

Die Propulsionseigenschaften eines Schiffes werden maßgeblich von der Geschwindigkeitsverteilung an der Propellerposition beeinflusst. Dieses Nachstromfeld stellt sich aus der Wechselwirkung zwischen der Verdrängungsströmung des Rumpfes und der propellerinduzierten Strömung ein. Prinzipiell ist es denkbar, die exakte, rotierende Propellergeometrie zusammen mit dem Schiffsrumpf zu modellieren, allerdings würde ein gemeinsamer Lösungsalgorithmus schnell die Rechenkapazitäten sprengen. Im Rahmen der hier betrachteten stationären Strömungszustände wird daher mittels einer auf dem Volumenkraftansatz basierenden Methode die Wirkung des Propellers durch Einbringen externer Impulsquellen in der Propellerebene realisiert. Die Implementierung erfolgt auf unstrukturierten Gittern als Kraftscheibenmodell, so dass eine höchst mögliche Flexibilität bei der Implementierung gewahrt bleiben kann (Kapitel 6).

Einige vorausgehende und grundlegende Ideen zur Entwicklung des Strömungslösers für schiffstechnische Anwendungen wurden auf strukturierten Formulierungen begonnen. Die Realisierung komplexer Rumpfgeometrien, wie sie besonders bei Schiffen in beschränkten Fahrwassern üblich sind, führt bei der Gebietsdiskretisierung mit abzählbaren Strukturgittern zu erheblichem Arbeitsaufwand und damit zur Unwirtschaftlichkeit in der Praxis. Die entwickelten Algorithmen wurden daher auf unstrukturierte Formulierungen portiert und sind als Methodenzweig einer objektorientierten Bibliothek verfügbar. Die objektorientierte Formulierung bietet prinzipiell ein hohes Maß an Wiederverwendbarkeit der Methoden und damit eine große Flexibilität hinsichtlich Weiterentwicklungen und problembezogenen Anpassungen (Kapitel 8).

Im letzten Kapitel 9 sind einige Verifizierungsrechnungen und anwendungsbezogene Simulationen zusammengestellt.

2 Mathematische Modellierung

Eine Voraussetzung für die theoretische Beschreibung von Strömungsvorgängen sind die im Folgenden formulierten Grundgleichungen der Kontinuumsströmung. Diese Formulierungen basieren auf den Erhaltungsgesetzen der Mechanik wie sie in zahlreicher Literatur angegeben sind (z.B in [64],[59],[46],[55]). In diesem Kapitel sollen die resultierenden Gleichungen als Grundlage zitiert werden.

2.1 Grundgleichungen reibungsfreier und reibungsbehafteter Strömungen

Die instationären Grundgleichungen beschreiben in ihrer allgemeinen Form die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie. In einem raumfesten System (Eulersche Betrachtungsweise) wird dieses Erhaltungsprinzip auf ein durchströmtes Kontrollvolumen V mit der Oberfläche A angewendet. Jedem Oberflächenelement dA sei hier ein nach außen gerichteter Normalenvektor \vec{n} zugeordnet (Abb. (2.1)).

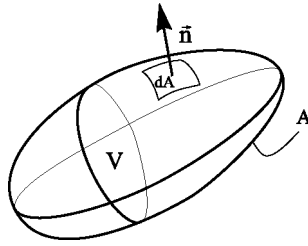


Abb. 2.1: Kontrollvolumen V mit Oberfläche A

In integraler, konservativer Form kann das Gleichungssystem wie folgt notiert werden:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \vec{Q} \, dV + \oint_A \vec{H} \cdot \vec{n} \, dA = \int_V \vec{F}_{vol} \, dV. \quad (2.1)$$

Hierbei ist \vec{Q} der Vektor der Strömungsgrößen pro Volumeneinheit mit den Komponenten Masse, Impuls und Energie. Der allgemeine Flussvektor \vec{H} enthält als erste Komponente den Massenfluss, als zweite Komponente den Impulsstrom sowie den Druck- und Spannungstensor und die dritte Komponente setzt sich zusammen aus dem Energiefluss, der Leistung der Druck- und Spannungsanteile und dem Wärmestrom. Der

Vektor \vec{F}_{vol} repräsentiert die spezifischen Volumenkräfte wie z. B. den Schwerkraftanteil $\vec{f}_{vol} = -\rho\vec{g}$ und dessen Leistungen. Anteile aus Massen- bzw. Energiequellen seien hier nicht berücksichtigt.

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho E \end{bmatrix}; \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v}\vec{v} + p\vec{\bar{I}} - \vec{\bar{\sigma}} \\ \rho E\vec{v} + p\vec{v} - \vec{\bar{\sigma}}\vec{v} - \vec{q} \end{bmatrix}; \quad \vec{F}_{vol} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f}_{vol} \\ \vec{f}_{vol} \cdot \vec{v} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

p ist der Druck, ρ ist die Dichte, \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor, $E = e + \frac{1}{2}\vec{v}^2$ die totale massenspezifische Energie, \vec{q} ist der Vektor des Wärmeflusses und $\vec{\bar{\sigma}}$ ist der Spannungstensor. $\vec{\bar{I}}$ sei hierbei der Einheitstensor in der Dimension des Problems.

Für eine dreidimensionale Strömung können die Größen \vec{v} , $\vec{\bar{\sigma}}$ und \vec{q} in kartesischen Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)^T$ wie folgt angegeben werden:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; \quad \vec{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \quad \vec{q} = \lambda \nabla T$$

mit λ , der Wärmeleitfähigkeit und T der Temperatur. Für ein Newtonsches Fluid ergeben sich bei Vernachlässigung der Volumenviskosität aus intermolekularen Kräften die Spannungsterme zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{v} & \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{v} & \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \vec{v} & \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

η ist hier die dynamische Scherviskosität des Fluides.

Die vollständige Beschreibung der Strömung erfordert zur Schließung des Systems der Erhaltungsgleichungen zusätzliche Beziehungen zwischen den thermischen und kalorischen Zustandsgrößen. Für ein thermisch und kalorisch ideales Gas gilt:

$$p = \rho RT; \quad e = c_v T \quad \text{und} \quad R = c_p - c_v \quad (2.4)$$

Hierbei ist e die innere Energie, R ist die spezifische Gaskonstante, c_v und c_p sind die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen bzw. konstanter Temperatur. Hiermit kann ein Zusammenhang zwischen dem Druck p und der totalen Energie $E = e + \vec{v}^2/2$ hergestellt werden:

$$p = (\kappa - 1)\rho e; \quad \text{mit dem Isentropenexponenten } \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.5)$$

2.2 Erhaltungsgleichungen inkompressibler Fluide

Bei den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Strömungen kann das Fluid mit guter Näherung als volumenbeständig betrachtet werden, so dass sich für die Formulierung der Erhaltungsgleichungen eine Spezialisierung ergibt.

Mit Blick auf die in einem späteren Kapitel behandelte Reynoldssche Mittelung der Gleichungen hinsichtlich der Turbulenzmodellierung sei hier als zweckmäßige Formulierung zur Darstellung von Vektoren und Tensoren die Tensor-Notation unter folgender Definition angewendet:

- Indizes i, j, k von 1 bis 3 entsprechend x, y, z ,
- Ortsvektor $x_j = (x_1, x_2, x_3)^T \hat{=} (x, y, z)^T \quad j = 1, 2, 3$,
- Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} \equiv v_j = (v_1, v_2, v_3) \hat{=} (u, v, w)^T$,
- über doppelt auftretende, gleiche Indizes wird summiert,
- eine Größe mit 2 Indizes ist ein Tensor,
- der Einheitstensor wird als Kronecker Symbol $\delta_{j,k}$ dargestellt

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k. \end{cases}$$

Als Konsequenz aus der Volumenbeständigkeit des Fluids reduziert sich die Kontinuitätsgleichung zur Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$, was zu veränderten Lösungseigenschaften des Systems aus Gl.(2.1) führt, da keine Zeitableitung in dieser Gleichung mehr auftritt. Außerdem verschwindet damit der Divergenzterm in den Normalspannungen des Spannungstensors Gl.(2.3). Dieser lautet jetzt:

$$\sigma_{j,k} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right). \quad (2.6)$$

Die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls lauten in differentieller Form damit:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial (v_j v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} f_j \quad (2.8)$$

In der Gleichung (2.8) bezeichnet dementsprechend v_j die Geschwindigkeitskomponente j in Richtung der kartesischen Koordinate x_j , p den Druck, ρ die (konstante) Dichte, ν die kinematische Viskosität und t die Zeit. Als äußere Volumenkräfte

wirke ausschließlich die Schwerkraft. Dieses Gleichungssystem wird als Navier-Stokes-Gleichungen eines inkompressiblen Fluids bezeichnet. Bleiben die Reibungsterme unberücksichtigt, wird das System als Euler-Gleichungen verstanden.

Bei inkompressiblen Strömungen besteht die Kopplung zwischen dem System aus Kontinuitäts- und Impulsgleichungen und der Energiegleichung nur aus der Temperaturabhängigkeit der dynamischen Scherviskosität $\eta = \eta(T)$. Ist die Viskosität des inkompressiblen Fluids in einem Strömungsfeld näherungsweise bekannt, können aus der Kontinuitäts- und den Impulsgleichungen die Strömungsgeschwindigkeiten und der Druck berechnet werden. Mit Hilfe des Impulssatzes können die mechanischen Energieanteile eliminiert werden und wird angenommen, dass die spezifische Wärmekapazität konstant ist, so vereinfacht sich die Energiegleichung zu einer Transportgleichung für die Temperatur:

$$\frac{\partial(c_v T)}{\partial t} + \frac{\partial c_v v_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + q \quad (2.9)$$

Hieraus ließe sich dann direkt die zugehörige Temperaturverteilung ermitteln, um dann beispielsweise mittels eines Iterationsverfahrens mit angepasster Zähigkeit das System aus Kontinuitäts- und Impulsgleichungen erneut zu lösen. Diese sehr aufwändige Vorgehensweise ist jedoch in den meisten Fällen nicht erforderlich, da die Temperatur in den hier betrachteten Strömungen als konstant betrachtet werden kann.

Dementsprechend handelt es sich bei einer dreidimensionalen inkompressiblen, isothermen Strömung um ein System von vier gekoppelten, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen Gl.(2.7) und Gl.(2.8) für die vier Unbekannten v_j und p . Analytische Lösungen sind nur für sehr einfache Strömungen bekannt [59]. Der überwiegende Teil der technisch interessanten Strömungen muss daher numerisch untersucht werden.

2.2.1 Ähnlichkeitsbetrachtungen

Aus der Dimensionsanalyse läßt sich zeigen, dass jede physikalische Größe als Potenzprodukt der Grunddimensionen Länge L , Masse M , Zeit T und Temperatur θ angegeben werden kann. Bezüglich der späteren Anwendungen sei hier das Gleichungssystem Gl.(2.7) und Gl.(2.8) zweckmäßig mit den abgeleiteten Grundgrößen L (Schiffslänge), U (ungestörte Anströmgeschwindigkeit) und ρ (konstante Dichte) dimensionslos gemacht. Dies fördert die Übersichtlichkeit bei der numerischen Behandlung, und die Vergleichbarkeit zu anderen Lösungsmethoden bzw. physikalischen Modellversuchen wird erleichtert. Es ergeben sich folgende dimensionslose Variablen:

$$\begin{array}{ll} x^* = x/L & u^* = u/U \\ y^* = y/L & v^* = v/U \\ z^* = z/L & w^* = w/U \\ t^* = t \cdot U/L & p^* = p/(\rho U^2) \end{array}$$

Damit lassen sich die dimensionslosen Kennzahlen Reynolds- bzw. Froude-Zahl angeben mit:

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta} \quad \text{und} \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{g \cdot L}}. \quad (2.10)$$

Die Reynolds-Zahl Re wird im allgemeinen als Verhältnis von Trägheits- und Zähigkeitskraft gedeutet. Sollen zwei Strömungen also hinsichtlich des Reibungseinflusses ähnlich verlaufen, so muß die Reynolds-Zahl für beide Vorgänge den gleichen Wert haben. Das entsprechende Ähnlichkeitsgesetz für ein Schiffsmodellversuch lautete damit für zwei verschiedene Fälle (1) bzw. (2)

$$\frac{U_1 L_1}{\nu_1} = \frac{U_2 L_2}{\nu_2}.$$

Die Froude-Zahl Fr ist das Kriterium für die Ähnlichkeit von Strömungen, die unter dem Einfluss der Schwerkraft stehen. Sie kann als das Verhältnis aus Trägheits- und Schwerkraft beschrieben werden. Bei Wasserströmungen mit freier Oberfläche spielt dies eine wichtige Rolle. Im Schiffsmodellversuch zur Ermittlung des Widerstandes, der sowohl von der Reibung als auch von der Wellenbildung abhängt, müssten gleichzeitig Reynolds- und Froude-Zahl identisch sein. Da aus praktischen Erwägungen $\nu_1 = \nu_2$ ist und $g_1 = g_2$ gilt, lassen sich für $L_1 \neq L_2$ nicht beide Ähnlichkeitsgesetze simultan erfüllen. Im Schiffsmodellversuch wird meist die Froudesche Ähnlichkeit bevorzugt.

Für eine kompakte Formulierung der Erhaltungsgleichungen wird an dieser Stelle der hydrodynamische Druck \tilde{p}^* als Differenz zwischen dem Gesamtdruck p^* und lokalem hydrostatischen Druck mit y^* der Koordinate in entgegengesetzter Erdbeschleunigungsrichtung eingeführt:

$$\tilde{p}^* = p^* + \frac{y^*}{Fr^2} \quad (2.11)$$

In kartesischer Schreibweise ergibt sich damit für das Gleichungssystem Gl.(2.7) und Gl.(2.8) die folgende Form:

$$\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} (v_j^* v_k^* + \tilde{p}^*) = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_j^*} \right). \quad (2.13)$$

2.3 Lösungsansätze für die Navier-Stokes-Gleichungen

2.3.1 Übersicht und Motivation

Eine Besonderheit bei der Formulierung von Lösungsansätzen für das Gleichungssystem aus Gl.(2.7) und Gl.(2.8) inkompressibler Fluide mit den abhängigen Variablen v_j , $j = 1 \dots 3$ und dem Druck p ist, dass keine unabhängige Gleichung zur Bestimmung des Drucks existiert, dessen Gradient in jeder Impulsgleichung wirkt. Die Kontinuitätsgleichung kann als eine kinematische Verträglichkeitsbedingung ($\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$) für die Geschwindigkeitskomponenten interpretiert werden.

Die aus der Literatur bekannten Lösungsansätze für diese Problemstellung unterscheiden sich daher im Wesentlichen durch die Art der Kopplung zwischen dem Druck- und dem Geschwindigkeitsfeld:

- Druckkorrekturmethode bilden die Grundlage vieler Integrationsverfahren der Navier-Stokes Gleichungen inkompressibler Fluide in den primitiven Variablen v_j und p . Das prinzipielle Konzept für einen Zeitschritt von t^n nach $t^{n+1} = t^n + \delta t$ besteht darin, zunächst Geschwindigkeitskomponenten aus den Impulsgleichungen zu berechnen und diese dann zusammen mit dem Druck über eine Druckkorrektur zu korrigieren, so dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Eine Druckkorrekturgleichung lässt sich aus der Divergenz des Impulses (Volumenkräfte vernachlässigbar)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_j v_k) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \sigma_{j,k} \right] = 0 \quad (2.14)$$

und mit $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ als Poissongleichung für p formulieren:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (v_j v_k) \right) \quad (2.15)$$

Diese Vorgehensweise wird in einen iterativen Lösungsprozess eingebunden bis gleichzeitig Kontinuitäts- und Impulsgleichungen erfüllt sind. Verbreitete Methoden sind hierzu beispielsweise die Teilschrittmethode (fractional step method) [33] in der die Impulsgleichungen nicht in einem Schritt, sondern über Zwischenschritte integriert werden, oder das SIMPLE-Verfahren (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [49] mit impliziter Formulierung der Impulsgleichungen.

Je nach Gittertyp treten bei den Druckkorrekturverfahren ggf. Detailprobleme auf, die einer gesonderten Behandlung bedürfen. Als erweiterte Verfahren sind beispielsweise SIMPLE Revised [48], SIMPLE-Consistent [71] oder PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators [30]) in der Literatur bekannt.

- Bei Stromfunktions-Wirbelvektor Formulierung können die Navier-Stokes Gleichungen für ebene, inkompressible Strömungen mittels Einführen der Stromfunktion Ψ und Wirbelstärke Ω als abhängige Variable vereinfacht werden. Mit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v \quad \text{und} \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.16)$$

wird die Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt und bedarf keiner expliziten Behandlung mehr. Zusammengefügt liefern die Definitionen aus Gl.(2.16) eine kinematische Gleichung, die Poissongleichung für die Stromfunktion Ψ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\Omega, \quad (2.17)$$

und durch Anwendung des Rotationsoperators auf die Impulsgleichungen erhält man die dynamische Gleichung für die Wirbelstärke (Wirbeltransportgleichung):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Omega)}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right). \quad (2.18)$$

Der Druck ist hier als abhängige Variable vollständig eliminiert worden. Auch die Anzahl der Gleichungen ist um eins reduziert. Die beiden Gleichungen sind durch u und v als Ableitungen von Ψ in der Wirbeltransportgleichung und durch die Wirbelstärke Ω im Quellterm der Poissongleichung gekoppelt.

Als Lösungsprozedur kann nun von einem Ausgangsgeschwindigkeitsfeld durch Differenzieren die Wirbelstärke berechnet und über die Wirbeltransportgleichung die Wirbelstärke Ω^{n+1} zum neuen Zeitpunkt bestimmt werden. Hiermit erhält man die Stromfunktion Ψ^{n+1} über die Lösung der Poisson-Gleichung.

Schwierigkeiten liegen bei der Stromfunktion-Wirbelvektor Formulierung in der Definition geeigneter Randbedingungen. Beispielsweise erfordern feste Berandungen/ Symmetrieflächen als Stromlinie konstante Werte für die unbekannte Stromfunktion. Für dreidimensionale Strömungen geht die Simplität verloren. Man erhält drei Transportgleichungen für den Vektor der Wirbelstärke $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T$ und drei Poissongleichungen für das Vektorpotential $\vec{\Psi} = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)^T$, wobei Ψ_z der Stromfunktion Ψ im zweidimensionalen Fall entspricht.

- Prinzipiell ist es auch denkbar, inkompressible Strömungsprobleme durch Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Fluide bei sehr kleinen Mach-Zahlen $Ma = (u/a) \ll 1$ mit a der Schallgeschwindigkeit des Fluids, zu berechnen. Eine Betrachtung der Gleichungen für beispielsweise eine eindimensionale, reibungsfreie Strömung zeigt jedoch, dass dieser Lösungsweg numerisch ungünstig ist. Bei den Euler-Gleichungen für eindimensionale Strömungen handelt es sich um ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem mit den drei reellen Eigenwerten [27]:

$$\lambda_1 = u \quad \lambda_2 = u + a \quad \lambda_3 = u - a \quad (2.19)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems z.B. mittels eines expliziten Verfahrens führt über die Courant-Friedrichs-Levy (CFL)-Bedingung zu dem notwendigen Konvergenzkriterium [21]:

$$\Delta t_{max} \leq \frac{C \Delta x_{min}}{\lambda_{max}} = \frac{C \Delta x_{min}}{|u| + a} \quad (2.20)$$

Diese Beziehung besagt, dass die maximale Schrittweite in der Zeit von der kleinsten räumlichen Schrittweite, dem größten Eigenwert und der CFL-Zahl C bestimmt wird. Aus dem Konvergenzkriterium lässt sich erkennen, dass bei zunehmender Schallgeschwindigkeit a und konstanter Strömungsgeschwindigkeit u der zulässige Zeitschritt kleiner wird. Im Grenzfall inkompressibler Fluide $a \rightarrow \infty$ strebt der maximale Zeitschritt gegen Null. Die Anwendung der Erhaltungsgleichungen für kompressible Fluide auf Strömungen abnehmender Kompressibilität ist daher sehr beschränkt.

- Die Methode der künstlichen Kompressibilität wird in dieser Arbeit zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen verwendet, und nachfolgend im Detail beschrieben.

2.3.2 Methode der künstlichen Kompressibilität

Kompressible Strömungen sind in der Aerodynamik bei Körperumströmungen oder Innenströmungen von großer Bedeutung. Daher gibt es eine ganze Anzahl von Entwicklungen im Bereich der numerischen Lösung der Gleichungen kompressibler Strömungen. Viele dieser Methoden sind sehr weit entwickelt und zeichnen sich durch eine hohe Effizienz aus. Es stellt sich daher die Frage, inwieweit derartige Formulierungen an die Problemstellung inkompressibler Fluide angepasst werden können.

Eines der Hauptunterschiede zwischen den Euler-Gleichungen für kompressible und inkompressible Strömungen ist ihr mathematischer Charakter: Das Gleichungssystem für die kompressiblen Strömungen ist von hyperbolischem Charakter, besitzt also reelle Charakteristiken entlang derer die Signalausbreitungsgeschwindigkeit einen endlichen Wert hat. Im Gegensatz dazu haben die Gleichungen für inkompressible Strömungen einen gemischt parabolisch-elliptischen Charakter. Sollen nun Methoden, die ursprünglich für kompressible Gleichungen entwickelt wurden für inkompressible Fluide Verwendung finden, muss der Gleichungscharakter entsprechend verändert werden.

Die fehlende Zeitableitung in der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide ist für den Unterschied in den Charakteristiken verantwortlich. Um nun der inkompressiblen Formulierung einen hyperbolischen Charakter zu geben ist es naheliegend, die Massenerhaltungsgleichung mittels Zeitableitung zu erweitern. Da die Dichte hier konstant ist und die Geschwindigkeiten in den Impulsgleichungen auftreten, verbleibt der Druck als eine geeignete Wahl. Dieses ergänzt die fehlende Kopplung zwischen den Kontinuitäts- und den Impulsgleichungen.

Für eine kompressible Strömung lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.21)$$

Durch Verwenden der Zustandsgleichung

$$p = \rho R T \quad \longrightarrow \quad dp = R T d\rho \quad \longrightarrow \quad dp = \beta^2 d\rho \quad (2.22)$$

wird der künstliche Kompressibilitätsparameter β eingeführt. Dieser entspricht einer isothermen Schallgeschwindigkeit $\beta^2 = dp/d\rho|_{T=\text{const}}$. Die Massenerhaltungsgleichung der nun künstlich kompressiblen Strömung erhält damit eine Form, dessen grundlegendes Konzept bereits 1967 von Chorin [17] vorgeschlagen wurde:

$$\frac{1}{\rho} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.23)$$

Durch diese Modifikation wird nicht mehr das physikalisch richtige Gleichungssystem für inkompressible Strömungen gelöst, d.h. nur im konvergenten Fall für einen stationären Zustand mit $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ erfüllt die Lösung die Kontinuitätsgleichung inkompressibler Strömungen. Eine prinzipielle Möglichkeit dieses Konzept auf zeitabhängige Probleme zu erweitern, bietet das duale Zeitschrittverfahren. Hier wird eine zweite Zeitebene eingeführt, die als äußere Iteration zu der künstlich kompressiblen Formulierung betrachtet werden kann [23].

Die Einführung der künstlichen Schallgeschwindigkeit β und der Zeitableitung des Drucks ändert nun den Typ der Gleichungen. Die Gleichungen für reibungsfreie Strömungen im Falle inkompressibler Fluide sind von elliptisch-parabolischen Typ in Ort und Zeit mit einer Schallgeschwindigkeit $a^2 = \frac{dp}{d\rho} \rightarrow \infty$ für $d\rho \rightarrow 0$, also mit einer unendlich schnellen Informationsausbreitung.

Die künstliche Kompressibilität führt beispielsweise in der $x - t$ - Ebene auf die endliche Informationsausbreitungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{u^2 + \beta^2}$. Die dazugehörigen reellen Eigenwerte des Differentialgleichungssystems lauten:

$$\lambda_1 = u \quad \lambda_2 = u \quad \lambda_3 = u + c \quad \lambda_4 = u - c \quad (2.24)$$

Prinzipiell ist β also ein frei wählbarer Parameter, der so eingestellt wird, dass die Lösung möglichst schnell gegen den stationären Zustand strebt.

In Analogie zum kompressiblen Fall kann auch für inkompressible Strömungen eine künstliche Mach-Zahl Ma_k definiert werden [8]. Diese stellt das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur künstlichen Schallgeschwindigkeit dar:

$$Ma_k = \frac{u}{c} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + \beta^2}} < 1 \quad (\beta > 0) \quad (2.25)$$

Für reelle Werte $\beta > 0$ ist die künstliche Schallgeschwindigkeit c immer positiv und größer als u . Daraus folgt, dass die künstliche Mach-Zahl Ma_k immer kleiner als 1 ist. Die pseudo-kompressible Strömung ist dann mit einer kompressiblen Unterschallströmung vergleichbar. Dies erlaubt die Übertragung von Erfahrungen, Ideen und Lösungskonzepten wie beispielsweise die Verwendung von Flux-Splitting Methoden kompressibler Fluide.

Die Definition der künstlichen Kompressibilität ist mathematisch gesehen eine Vorkonditionierung des Gleichungssystems. Für kompressible Strömungen kleiner Mach-Zahlen existiert beispielsweise noch eine Reihe von Varianten mit zusätzlich veränderten Impulsgleichungen hinsichtlich einer Vorkonditionierung des Gleichungssystems, um dem Problem unterschiedlicher Zeitskalen (Schallausbreitung, Gasströmung) gerecht zu werden ([74]).

2.3.3 Wahl der künstlichen Schallgeschwindigkeit

Die Methode der künstlichen Kompressibilität wurde in einigen bereits erfolgreich durchgeführten Projekten eingesetzt und es wurden Kriterien zur Wahl geeigneter Werte für β erarbeitet (s. auch [8] und [5]).

Die Wahl eines geeigneten Wertes für β unterliegt demnach gewissen Einschränkungen. Eine obere Grenze lässt sich aus dem Verhältnis K der Beträge des maximalen zum minimalen Eigenwertes des Differentialgleichungssystems für beispielsweise die $x - t$ - Ebene angeben:

$$K = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} = \frac{|u + \sqrt{u^2 + \beta^2}|}{|u - \sqrt{u^2 + \beta^2}|} \quad (2.26)$$

Ein großer Wert für K steht für ein steiferes Differentialgleichungssystem mit schwierigerer Lösung.

In der Literatur existieren verschiedene Ansätze, bei denen der Wert β proportional zur lokalen Strömungsgeschwindigkeit gewählt wird, wie beispielsweise in [26] und [19]:

$$\beta^2 = \gamma \cdot \min \left[(u^2 + v^2 + w^2), \beta_{min}^2 \right], \quad (2.27)$$

wobei der Parameter γ ein Faktor der Größenordnung eins ist.

Der nach Gleichung (2.27) erhaltene Wert für β ist lokal variabel. Dies kann zu Konvergenzschwierigkeiten führen, da die Strömungsgeschwindigkeit und somit auch der Parameter β sehr groß werden können. Eine sinnvolle untere Grenze für β lässt sich aus der Forderung abschätzen, dass sich künstliche Druckwellen schneller als die viskosen Effekte ausbreiten sollen.

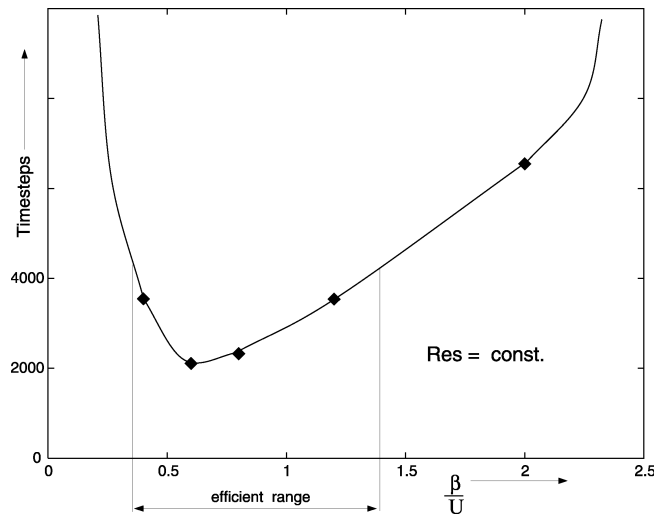


Abb. 2.2: Vergleich des Konvergenzverhaltens des Lösungsverfahrens bei verschiedenen Werten des Parameters β^*

Für Strömungen, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht worden sind, haben sich Werte für $\beta^* = \beta/U$, in Abhängigkeit von der jeweiligen Problemstellung, zwischen 0.4 und 2.0 als geeignet erwiesen. Insgesamt führen zu kleine Werte von β^* zur Divergenz des Lösungsverfahrens. Die Abb. (2.2) zeigt das Konvergenzverhalten einer zweidimensionalen, laminaren Grenzschichtströmung bei verschiedenen Werten des Parameters β^* . Aufgetragen ist die Anzahl der maximal notwendigen Iterationsschritte zum Erreichen eines vorgegebenen Wertes des stationären Operators.

2.4 Anfangs- und Randbedingungen

Das zu lösende Gleichungssystem stellt ein Anfangswertproblem in der Zeit und ein Randwertproblem im Ortsraum dar. Daher benötigt man sowohl Anfangs- als auch Randbedingungen für die Lösung dieser Gleichungen.

In der Regel sind Anfangsbedingungen für die abhängigen Variablen nicht bekannt. Daher wird hier als Anfangsbedingung die sog. Freistrombedingung vorgegeben, d.h. der Schiffsrumpf tritt als plötzliche Störung in der ungestörten Strömung auf. Für die Berechnung viskoser Stömungen wird von der Lösung der reibungsfreien Berechnung ausgegangen. In diesem Fall dient das reibungsfreie Strömungsfeld als Anfangsbedingung für die zeitaufwändigere Lösung der viskosen, u.U. turbulenten Strömung dar.

Bei der Formulierung der Randbedingungen können prinzipiell zwei Arten von Berandungen des Integrationsgebietes nämlich die festen, physikalischen Ränder und die freien, durchströmten Ränder, unterschieden werden.

Als feste Ränder werden z.B. Wände und Körperflächen bezeichnet. Für diese Berandungen gilt die Stokes'sche Haftbedingung mit:

$$u_w = 0 \quad , \quad v_w = 0 \quad , \quad w_w = 0 \quad (2.28)$$

(Die Indizes w bezeichnen die Größen auf dem Rand). Im Falle von nicht-viskosen Strömungen wie z.B. in [6] und [7] wird nur der Anteil der Geschwindigkeit zu Null gesetzt, der normal zum Körperperrand gerichtet ist.

$$\frac{\partial v_j}{\partial n} = 0 \quad (2.29)$$

Für den Druck p_w auf den Wänden existiert keine natürliche Randbedingung. Für den Wanddruck müssen Verträglichkeitsbedingungen aus den Navier-Stokes-Gleichungen ermittelt werden. Für Strömungen mit hoher Reynolds-Zahl Re kann, aufgrund des Grenzschichtcharakters der Strömung in Wandnähe, der Druckgradient vernachlässigt werden, so dass auf der Berandung der Druck aus dem Strömungsfeld mit:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (2.30)$$

extrapoliert werden kann.

Durch die notwendige willkürliche Begrenzung des Integrationsgebietes entstehen freie, durchströmte (künstliche) Ränder. Da diese meist Gebiete mit unbekannten oder nur teilweise bekannten Strömungszuständen schneiden, müssen hier physikalisch sinnvolle Approximationen formuliert werden. Typische freie Ränder sind die Ein- und Ausströmränder, die das Berechnungsgebiet stromauf, stromab und seitlich begrenzen. Zur Festlegung der Randbedingungen an freien Rändern wird vorausgesetzt, dass dort die Wirkung der Reibungsterme vernachlässigbar ist. Durch diese Annahme können die Randbedingungen aus der charakteristischen Lösung \vec{W} der entsprechenden Eulergleichungen abgeleitet werden [27] mit:

$$\vec{W}(x_n, t) = \vec{W}(x_n - \lambda t)$$

wobei x_n die Koordinate normal zum freien Rand und λ der dazugehörige Eigenwert ist. Die Randbedingungen am Einströmrand (Index r) werden durch die Formulierung der Variablen \vec{W} mit den Anströmbedingungen (Index ∞) und durch Verträglichkeitsbedingungen (Index e), die durch Extrapolation aus dem Feld bestimmt werden, festgelegt. Für den Einströmrand lässt sich ableiten:

$$u_r^* = \frac{p_\infty^* - p_e^* + (u_\infty^* + u_e^*) \sqrt{u_e^{*2} + \beta^{*2}}}{2(u_e^* - u_\infty^*) \sqrt{u_e^{*2} + \beta^{*2}}}$$

$$p_r^* = p_\infty^* - (u_r^* - u_\infty^*) \left(u_r^* + \sqrt{u_e^{*2} + \beta^{*2}} \right)$$

$$v_r^* = 0$$

$$w_r^* = 0$$

Für Ausströmränder wird die Randbedingung durch eine Abstrahlbedingung festgelegt. Diese erlaubt einer Störungswelle die Begrenzung zu passieren ohne reflektiert zu werden und so das Strömungsfeld zu beeinflussen [31]:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \left(p^* - v_n^* \sqrt{v_n^{*2} + \beta^{*2}} \right) + \alpha (p^* - p_\infty^*) = 0$$

Hierbei ist v_n die Geschwindigkeitskomponente normal zum Rand, der Wurzel Ausdruck $\sqrt{\dots}$ stellt die künstliche Schallgeschwindigkeit am Rand dar, und α ist ein dimensionsloser Iterationsparameter mit einem Wert zwischen 0.1 und 0.2. Für die meisten Beispiele dieser und anderer Arbeiten wie z.B. [19] hat sich eine Extrapolation erster Ordnung aus dem Strömungsfeld für die Geschwindigkeitskomponenten als ausreichend genau erwiesen.

Eine weitere oft genutzte freie Begrenzung eines Integrationsraumes ist eine Symmetrieebene. Aus der Symmetriebedingung folgt, dass der Normalgradient aller Variablen und die Geschwindigkeitskomponente normal zur Symmetrieebene zu Null werden.

3 Turbulente Strömungen

Die Mehrzahl technisch relevanter Strömungsvorgänge wird durch turbulente Strukturen beeinflusst, wie sie beispielsweise bei Schiffsumströmungen auftreten. Hierbei stellt die Turbulenz selbst ein physikalisch noch nicht vollständig gelöstes Problem dar. In der Vergangenheit wurden zum grundlegenden Verständnis der Turbulenz zahlreiche physikalische Experimente gemacht. Je nach geforderter Detailtreue können allerdings Strömungsversuche einen immensen Versuchsaufwand bedeuten oder Teile der gesuchten Strömungsgrößen sind überhaupt nicht messbar. Für praktische Optimierungsaufgaben im schiffbaulichen Kontext ist jedoch die detaillierte Kenntnis turbulenter Strukturen für die Problemerkennung notwendig.

Die Hauptschwierigkeit bei der theoretischen Behandlung turbulenter Erscheinungen liegt in ihrem Charakter: zum einen erscheinen turbulente Bewegungen lokal als völlig ungeordnet und damit nur statistischen Methoden zugänglich, auf der anderen Seite treten organisierte, kohärente Strukturen auf, die über große Strömungsbereiche hinweg in Wechselwirkung treten. Vor diesem Hintergrund scheint eine Kombination aus physikalischem Experiment und numerischer Simulation eine derzeit verlässliche Herangehensweise bei der Untersuchung turbulenter Strömungen zu sein.

Durch die Gleichungen (2.7)–(2.8) sind turbulente, inkompressible Strömungen prinzipiell vollständig beschrieben [9]. Allerdings ist die turbulente Strömung durch unregelmäßige, hochfrequente, räumliche und zeitliche Schwankungen der Strömungsgrößen gekennzeichnet. Um diese Schwankungen vollständig numerisch auflösen zu können, müssten auch die kleinsten Zeit- und Längenskalen der Turbulenz (Dauer und Größe der kleinsten Turbulenzwirbel, in denen kinetische Energie dissipiert wird) durch die Diskretisierung aufgelöst werden. Aus konzeptioneller Sicht ist es die einfachste Herangehensweise, alle in der Strömung herrschenden Bewegungen direkt zu berechnen (DNS: direct numerical simulation). Allerdings ist der dafür erforderliche Berechnungsaufwand (sehr große Anzahl an Gitterzellen, sehr kleine Zeitschritte) überproportional von der Reynolds-Zahl abhängig. In Schäfer [56] sind hierzu einige Größenordnungen angegeben (s. Abb. 3).

	Freie Turbulenz	Wandturbulenz
Speicherplatz	$\sim Re^{2.25}$	$\sim Re^{2.625}$
Rechenzeit	$\sim Re^3$	$\sim Re^{3.5}$

Tabelle 3.1: Asymptotischer Speicherplatz- und Rechenaufwand für eine DNS

Legt man für eine Plausibilitätsabschätzung die Kolmogoroff-Skalen zugrunde, ergäbe sich eine erforderliche Zellenzahl von $N \approx Re^{\frac{9}{4}}$. Für die meisten technischen Anwendungen und im speziellen für Schiffsumströmungen mit Reynolds-Zahlen zwischen 10^7 – 10^9 ist dieses Vorgehen auf heutigen Rechnern nicht durchführbar.

Basierend auf der Annahme, dass großskalige Strukturen eine größere Energie als kleinskalige besitzen und daher maßgeblicher für den Transport konservativer Größen verantwortlich sind, liegt im Gegensatz zur direkten Simulation bei der LES (Large Eddy Simulation) das Hauptaugenmerk nur auf größeren Strukturen. Benötigt wird beispielsweise ein Geschwindigkeitsfeld, das mittels geeigneter Filterung

$$\bar{v}_i(x) = \int G(x, x') v_i(x') dx' \quad \text{mit der Filterfunktion } G(x, x') \quad (3.1)$$

nur großskalige Anteile enthält, wie z. B. in [39] beschrieben. Prinzipiell ergibt sich nach Filterung und Einführung eines Modells für die kleinskaligen Anteile ein gefiltertes, dreidimensionales und zeitabhängiges Gleichungssystem, das nach den gefilterten Strömungsgrößen gelöst wird.

Der numerische Aufwand ist verglichen mit der direkten Simulation bei der LES bereits deutlich reduziert. Ein weiterer Schritt zu einer derzeit meist notwendigen Verringerung des Rechenleistungs- und Speicherplatzbedarfs liefert die statistische Turbulenzmodellierung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Zwei-Gleichungs-Transportmodell implementiert und im Folgenden wird auf die statistische Modellierung näher eingegangen.

3.1 Statistische Turbulenzmodellierung

3.1.1 Reynolds-gemittelte Gleichungen

Bei technisch relevanten, turbulenten Strömungen ist meistens nicht das Geschwindigkeitsfeld unter Einschluss der turbulenten Schwankungen, sondern nur das Feld der Mittelwerte von Interesse. Ausgangspunkt für die statistische Turbulenzmodellierung ist daher ein Mittelungsprozess, bei dem angenommen wird, dass sich eine augenblickliche Strömungsgröße $q(x_j, t)$ mit $q = p, u, v, w$ mit dem Ortsvektor $x_j = (x_1, x_2, x_3)^T = (x, y, z)^T$ in einen zeitlichen Mittelwert \bar{q} und einen momentanen Schwankungswert q' zerlegen läßt. Der Mittelwert kann entweder statistisch stationär oder statistisch instationär sein.

Im stationären Fall gilt für den Mittelwert \bar{q}

$$\bar{q}(x_j) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} q(x_j, t) dt \quad (3.2)$$

und daraus per Definition für den Mittelwert der Schwankungsgröße $q'(x_j, t)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} q'(x_j, t) dt = 0 \quad (3.3)$$

Für eine statistisch instationäre Strömung gilt

$$\bar{q}(x_j) := \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} q(x_j, t) dt \quad (3.4)$$

wobei hier das Integrationsintervall T so groß zu wählen ist, dass die kleinen unregelmäßigen Schwankungen herausgemittelt werden, zugleich jedoch so klein ist, dass die langsame zeitliche Änderung erhalten bleibt. In diesem Falle ist eine Mittelung nur dann möglich, wenn die Frequenzen der schnellen und der langsamen Schwankungen deutlich voneinander getrennt sind.

Für die im inkompressiblen Fall auftretenden Größen können die Momentanwerte der Geschwindigkeiten und des Druckes als Summe eines Mittelwertes (\bar{v}_j bzw. \bar{p}) und einer momentanen Schwankung (v'_j bzw. p') ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} v_j &= \bar{v}_j + v'_j \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zur Ableitung der gemittelten Erhaltungsgleichungen werden zunächst die Ausdrücke (3.5) in die Gleichungen (2.7) und (2.8) eingesetzt und anschließend gemittelt. Daraus ergeben sich die folgenden Reynolds-gemittelten Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_j \bar{v}_k + \overline{v'_j v'_k} - \nu \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = f_j \quad (3.7)$$

Einerseits vereinfacht die Mittelung die Gleichungen durch das Verschwinden der Mittelwerte der Schwankungsgrößen, aber andererseits kommen mit den gemittelten Produkten der Schwankungen $\overline{v'_j v'_k}$ neue Unbekannte hinzu. Diese zusätzlichen turbulenten

Terme werden als Reynoldssche Spannungen bezeichnet und können in Analogie zu den molekularen Spannungstermen in Form eines Spannungstensors geschrieben werden:

$$-\rho \overline{v'_j v'_k} := (\sigma_{jk})_t = -\rho \begin{bmatrix} \overline{v_1'^2} & \overline{v_1' v_2'} & \overline{v_1' v_3'} \\ \overline{v_2' v_1'} & \overline{v_2'^2} & \overline{v_2' v_3'} \\ \overline{v_3' v_1'} & \overline{v_3' v_2'} & \overline{v_3'^2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Der Reynoldssche Spannungstensor ist symmetrisch, d. h. $\overline{v'_j v'_k} = \overline{v'_k v'_j}$, was 6 unabhängige Komponenten des Tensors ergibt, die sich nun leicht mit den molekularen Komponenten vergleichen lassen. Allerdings beschreiben die turbulenten Spannungen den Impulsaustausch durch die relativen Schwankungsgrößen und sind keine Reibungsspannungen.

3.1.2 Turbulenzmodellierung

Die statistische Turbulenzmodellierung hat die Aufgabe, das System der gemittelten Erhaltungsgleichungen durch Beziehungen zwischen den turbulenten Spannungen und den gemittelten Strömungsgrößen mathematisch zu schließen, so dass eine möglichst große Anzahl an Strömungsproblemen gelöst werden kann. Dabei muss das Turbulenzmodell neben der weitgefächerten Anwendbarkeit hinreichend genau, sowie einfach und effizient in der Handhabung sein. Unter den klassischen Modellen erfolgt in der Literatur eine Einteilung häufig gemäß der Anzahl der Transportgleichungen, die zur Berechnung der charakteristischen Turbulenzgrößen benötigt werden. Dabei nehmen mit der Anzahl der zusätzlich zu lösenden Transportgleichungen die Allgemeingültigkeit, aber auch die Komplexität der Modelle zu. Es wird zwischen Null-, Ein- und Zwei-Gleichungsmodellen und den komplexeren Reynolds-Spannungsmodellen unterschieden.

Grundlage vieler Gleichungsmodelle ist die Annahme, dass zwischen der Wirkung der molekularen (viskosen) und der turbulenten Spannungen eine Analogie existiert. Man nimmt dabei an, dass die turbulenten Spannungen in einem Zusammenhang mit der mittleren Deformationsrate stehen (Boussinesq-Approximation):

$$(\sigma_{jk})_t = -\rho \overline{v'_j v'_k} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right). \quad (3.9)$$

ν_t bezeichnet die turbulente Viskosität, die im Gegensatz zur kinematischen Viskosität ν keine Stoffgröße, sondern eine von der Strömung abhängige Variable ist (Wirbelviskositätshypothese). Die Reynolds-gemittelten Gleichungen (3.6), (3.7) erhalten damit die Form:

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_j \bar{v}_k - (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} f_j. \quad (3.11)$$

Die Boussinesq-Approximation dient zur Grundformulierung der Reynoldsschen Spannungen, allerdings ist damit das Problem noch nicht geschlossen, da ν_t eine neue Unbekannte als Funktion des Strömungszustandes ist.

Null- und Ein-Gleichungsmodelle

Aus Dimensionsbetrachtungen ergibt sich, dass sich die kinematische turbulente Viskosität (Wirbelviskosität) ν_t durch eine charakteristische turbulente Geschwindigkeit U_t und eine charakteristische turbulente Länge L_t ausdrücken lässt:

$$\nu_t = C U_t L_t, \quad (3.12)$$

mit C einer dimensionslosen Proportionalitätskonstante. Unter der Annahme, dass die hauptsächliche kinetische Energie der Turbulenz in den größeren Wirbelstrukturen enthalten ist, kann L_t als charakteristische Länge dieser Strukturen aufgefasst werden. Untersuchungen einfacherer, zweidimensionaler, turbulenter Strömungen mit dem einzigen signifikanten Gradienten der mittleren Geschwindigkeit $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ zeigen eine offensichtliche Beziehung zwischen den Bewegungen der größeren Wirbelstrukturen und der mittleren Strömung. Für die turbulente Geschwindigkeit wird daher angegeben:

$$U_t = c L_t \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (3.13)$$

Die Kombination dieser Annahmen und die Zusammenfassung der dimensionslosen Faktoren C bzw. c zu einer neuen Länge l_m (Mischungslänge) ergibt:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (3.14)$$

für eine turbulente Scherspannung σ_{xy} ergibt sich damit z. B.:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\overline{\rho u' v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (3.15)$$

Dieser Ansatz ist der Prandtlsche Mischungswegansatz [51]. Die jetzt auftretende unbekannte Mischungslänge l_m kann für eine Vielzahl von turbulenten Strömungen empirisch bestimmt werden. Die bekanntesten Modelle dieser Gruppe sind das algebraische Turbulenzmodell von Cebeci u. Smith [9] sowie das ähnliche Modell von Baldwin und Lomax [4]. Infolge der rein algebraischen Berechnung der Wirbelviskosität verursachen

diese Modelle einen geringen numerischen Aufwand und liefern für grenzschichtähnliche Strömungen ohne Ablösung gute Ergebnisse. Als prinzipieller Nachteil bleibt die lokale Betrachtung der Strömung für die Berechnung der Wirbelviskosität. Die Mischungsweg-Hypothese impliziert ein örtliches Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation der Turbulenz und führt zu einer Vernachlässigung von Transportvorgängen im Strömungsfeld. Allgemeingültiger sind Modelle, die die Wirbelviskosität aus charakteristischen Turbulenzgrößen berechnen, für die halb-empirische Transportgleichungen gelöst werden müssen.

Die Ein-Gleichungsmodelle verwenden hierbei zur Berechnung der charakteristischen Geschwindigkeit U_T meistens eine Transportgleichung für die kinetische Energie der Turbulenz k aus der Beziehung

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_j v'_j} \quad \text{und damit} \quad U_T = c'_\mu \sqrt{k} \quad (3.16)$$

mit c'_μ einer empirischen Proportionalitätskonstanten. Die erneute Verknüpfung ergibt damit

$$\nu_t = c'_\mu \sqrt{k} \cdot L_T \quad (3.17)$$

Die Bestimmung des turbulenten Längenmaßes L_T wird auch hier meist aus empirischen Ansätzen abgeleitet, die denen aufgrund der größenordnungsmäßigen Vergleichbarkeit mit der Mischungslänge ähnlich sind.

Zwei-Gleichungsmodell: $k - \varepsilon$

Bei den Zwei-Gleichungsmodellen wird neben der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie eine weitere Transportgleichung für die auf das turbulente Längenmaß L_T bezogene Größe gelöst.

Zunächst kann aus der Impulsgleichung (3.7) formal eine Transportgleichung für die Reynoldsschen Spannungen $-\rho \overline{v'_i v'_j}$ abgeleitet werden und durch Gleichsetzen der Indizes $i = j$ (Normalspannungsanteil) und anschließender Addition erhält man die vollständige Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie (s. a. [22]):

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_{\text{zeitl. Änderung}} + \underbrace{\overline{v_k} \frac{\partial k}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = - \underbrace{\overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\nu \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Dissipation}} \quad (3.18)$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[- \left(k + \frac{p'}{\rho} \right) v'_k + \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_j v'_k}) \right]}_{\text{Diffusion}} \quad (3.19)$$

Zur Lösung dieser Gleichung werden die unbekannten Korrelationen mittels geeigneter Modellannahmen bestimmt. Die Produktion \mathbf{P} von k kann mit Hilfe der erweiterten Wirbelviskositätshypothese ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{P} = -\overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{jk} k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k}, \quad (3.20)$$

der Diffusionsterm durch

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [\dots] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (3.21)$$

mit Pr_k , der Prandtl-Zahl der turbulenten Energie.

Eine weitere Annahme des $k - \varepsilon$ Modells setzt aus Dimensionsbetrachtungen ν_t in Beziehung zu k und der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ε :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.22)$$

Hierbei ist C_μ eine empirische Konstante und die Dissipationsrate ε ist definiert durch

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j}.$$

und tritt damit direkt in der Transportgleichung für k auf, zu der analog eine exakte Transportgleichung für ε aus den Erhaltungsgleichungen abgeleitet werden kann. Sie enthält viele Terme mit unbekannten Korrelationen höherer Ordnung, die wiederum durch geeignete Modellannahmen vereinfacht werden müssen. Für diese aufwändige Herleitung der Transportgleichung sei hier auf die Literatur verwiesen (z. B. in Laund-
er und Spalding 1974 [37])

So lassen sich für beide Größen k und ε die Transportgleichungen angeben, welche die gleiche Form wie eine allgemeine skalare Transportgleichung besitzen (nur die Diffusionskoeffizienten und Quellterme sind spezifisch):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_k k - \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] = \mathbf{P} - \varepsilon \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_k \varepsilon - \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] = C_{\varepsilon 1} \mathbf{P} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.24)$$

Die Gleichungen (3.22), (3.23) und (3.24) bilden zusammen den verbreitetsten Vertreter der Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodelle, das Standard- $k - \varepsilon$ Modell [38]. Aufgrund

der überschaubaren Komplexität und hoher Akzeptanz bei der Simulation von Schiffsumströmungen, ist dieses Standardmodell im Rahmen dieser Arbeit implementiert worden.

Ist der Einsatz ausschließlich auf hohe Reynolds-Zahlen oder turbulente Grenzschichten beschränkt, kann die molekulare kinematische Viskosität in den Gleichungen vernachlässigt werden (s. Randbedingungen für feste Wände). Die Konstanten des hier verwendeten Standardmodells sind:

C_μ	Pr_k	Pr_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92

Die Koeffizienten des Standard $k - \epsilon$ -Modells sind überwiegend empirisch bestimmt worden. Eine systematische Ableitung aus den Navier-Stokes-Gleichungen liefert die Anwendung der RNG Theorie (Renormalization Group). Die Änderungen des Standard $k - \epsilon$ -Modells beziehen sich auf einen modifizierten Koeffizientensatz und die experimentellen Werte wurden damit indirekt bestätigt. Die modifizierten Koeffizienten werden gemäß [63] angegeben mit:

C_μ	Pr_k	Pr_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$
0.085	0.7179	0.7179	1.063	1.72

Turbulenzmodell-Kombination: $k - \omega - SST$

Allen Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodellen ist die Gültigkeit der Wirbelviskositätshypothese und eine Transportgleichung für die spezifische Energie der Turbulenz gemeinsam. Zur Bestimmung der Dissipation ϵ bzw. eines turbulenten Längenmaßes L_t existieren verschiedene Ansätze. Kolmogorov entwickelte bereits in den 40er Jahren ein $k - \omega$ -Modell mit einer Transportgleichung für die spezifische Dissipationsrate oder charakteristische Frequenz $\omega = \epsilon/k$. Nachfolgend wurde dieses Modell von Saffmann, Launder und Spalding verbessert. Einen Überblick hierzu sowie weitere Entwicklungen sind in ([75], [76]) zusammengefasst. Obwohl die Transportgleichungen für ω und ϵ ineinander überführt werden können, ergeben sich insbesondere bei Grenzschichtströmungen mit Druckgradienten signifikante Unterschiede. Prinzipiell scheint es vorteilhaft, die $k - \omega$ -Formulierung innerhalb der Grenzschicht anzuwenden und außerhalb das $k - \epsilon$ -Modell, da hier das $k - \omega$ -Modell sehr empfindlich auf die Vorgaben für ω in der freien Anströmung reagiert.

Menter [41] hat diese Idee mit Hilfe einer Schaltfunktion F_1 realisiert, die den Wert eins im inneren Bereich hat und gegen null zum Grenzschichtrand tendiert. Die Stan-

dard $k - \varepsilon$ - Gleichungen werden in eine $k - \omega$ -Form transformiert und wie folgt angegeben:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_k k - \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] = \mathbf{P} - \beta^* k \omega \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_k \omega - \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] &= \gamma \mathbf{P} \frac{\omega}{k} - \beta \omega^2 \\ &+ 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die Modellkonstanten ergeben sich hierbei aus der Beziehung

$$(\sigma_k \sigma_\omega \beta)^T = F_1 (\sigma_k \sigma_\omega \beta)_1^T + (1 - F_1) (\sigma_k \sigma_\omega \beta)_2^T \quad (3.27)$$

mit den Indizes 1 und 2 bezüglich des $k - \omega$ bzw. $k - \varepsilon$ -Modells. Für die $k - \omega$ Konstanten werden die Werte angegeben mit

$$\sigma_{k1} = 1.176 \quad \sigma_{\omega 1} = 2.0 \quad \beta_1 = 0.075 \quad (3.28)$$

und entsprechend für das $k - \varepsilon$ -Modell

$$\sigma_{k2} = 1.0 \quad \sigma_{\omega 2} = 1.168 \quad \beta_2 = 0.0828 \quad (3.29)$$

Der Wert für γ wird mittels der Beziehung

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*} \quad (3.30)$$

mit den Koeffizienten κ und β^* haben die Werte 0.41 bzw. 0.09 und damit wird γ bestimmt:

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*} \quad (3.31)$$

In dem zweiten und wichtigsten Schritt wird die bisherige Definition der Wirbelviskosität modifiziert um dem Transport der turbulenten Spannungsterme besser Rechnung zu tragen (shear stress transport: SST). Die prinzipielle Idee des SST-Modells ist daher die Einführung einer oberen Grenze für die turbulenten Spannungen in Grenzschichten, so dass die typischerweise zu groß bestimmten Spannungswerte aus der Boussinesq-Approximation limitiert werden. Die veränderte Definition für die Wirbelviskosität wird daher angegeben mit

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega ; |\Omega_{ik}| F_2)} \quad (3.32)$$

mit $a_1 = 0.31$ und $|\Omega_{ij}| = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$

dem Betrag des Rotationstensors $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$. F_2 hat in Grenzschichtströmungen den Wert eins und wird in Richtung Grenzschichttrand zu null. Für den Fall $a_1 \omega > |\Omega_{ij}|$ (innerhalb der Grenzschicht) gilt nun die beobachtete Beziehung einer Proportionalität zwischen turbulenten Spannungen und der turbulenten kinetischen Energie (Bradshaw) $\sigma_t = \rho a_1 k$. In dem anderen Fall bleibt die ursprüngliche Beziehung $\nu_t = k/\omega$ erhalten.

Diese Turbulenzmodell-Kombination in Verbindung mit dem SST-Ansatz hat in verschiedenen Arbeitsgruppen bei entsprechender räumlicher Auflösung der Grenzschichten vielversprechende Ergebnisse geliefert. Eine Weiterentwicklung (rotation and curvature correction, RCSST) hierzu ist beispielsweise in Schweighofer [61] formuliert.

Reynolds-Spannungsmodell: RSM

Die im Vorangegangenen beschriebenen Methoden zur statistischen Turbulenzmodellierung basieren auf dem Wirbelviskositätsprinzip, welches bei komplexeren Strömungen mit starken Wandkrümmungen, großen Ablösungen, Wirbeln oder Rotationen nur bedingt zu aussagekräftigen Ergebnissen führt, da durch die Bedingung isotroper Turbulenz die individuellen Reynolds-Spannungen ungenügend wiedergegeben werden. Naheliegender wäre demnach die Formulierung von exakten Transportgleichungen für die (kinematischen) Reynolds-Spannungen

$$R_{ij} = -(\sigma_{ij})_t/\rho = \overline{v'_i v'_j}$$

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij}^* \quad \text{mit den Bezeichnungen :} \quad (3.33)$$

$$\frac{\text{Änderungsrate von } R_{ij} = \overline{v'_i v'_j}}{\text{Dissipationsrate von } R_{ij}} + \frac{\text{Konvektiver Transport von } R_{ij}}{\text{Transport von } R_{ij} \text{ aus Druck-Scher Korrelation}} = \frac{\text{Produktionsrate von } R_{ij}}{\text{Transport von } R_{ij} \text{ durch Rotation}} + \frac{\text{Diffusiver Transport von } R_{ij}}{\text{Transport von } R_{ij} \text{ durch Rotation}} - \frac{\text{Transport von } R_{ij} \text{ durch Rotation}}{\text{Transport von } R_{ij} \text{ durch Rotation}}$$

Mit diesen 6 partiellen Differentialgleichungen sind alle Einflussgrößen darstellbar, allerdings treten im diffusiven Transportterm D_{ij} und in der Druck-Scher Korrelation Π_{ij} Terme auf, für die ebenfalls Schließungsansätze notwendig sind, um das System lösen zu können. Sehr bekannt ist hier die Modellierung nach Launder [36] für den Diffusionsterm:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad (3.34)$$

mit $\nu_t = C_\mu k^2/\varepsilon$; $C_\mu = 0.09$ und $\sigma_k = 1.0$ sowie für die Druck-Scher Korrelation:

$$\Pi_{ij} = -C_1 \frac{k}{\varepsilon} (R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) - C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) \quad (3.35)$$

mit $C_1 = 1.8$ und $C_2 = 0.6$.

Die bei dieser Modellierung notwendigen Größen für k und ε werden durch die gleichzeitige Lösung der Transportgleichung für ε bzw. durch die Beziehung $k = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + R_{33})$ bestimmt.

Die von Naot und Rodi [45] vorgeschlagene Vereinfachung betrifft die aufwändige Behandlung der konvektiven und diffusiven Terme, die dann durch algebraische Ansätze formuliert werden (Algebraic Stress Model ASM).

Da im Rahmen dieser Arbeit ein Zwei-Gleichungsmodell ($k - \varepsilon$ -Modell) implementiert wurde, sei an dieser Stelle auf eine detailliertere Beschreibung der Reynolds-Spannungs- und algebraischen Spannungsmodelle in der Literatur verwiesen.

3.1.3 Randbedingungen für die turbulenten Größen

Wie bereits in Kapitel (2.4) bemerkt, gehört zu jedem Rand des Integrationsbereiches ein spezieller Satz von Randbedingungen. Die Transportgleichungen für k und ε des in dieser Arbeit verwendeten Modells besitzen aufgrund des Diffusionsterms elliptischen Charakter, wonach sich die folgenden Randbedingungen formulieren lassen:

1. Einströmränder: Ist die ankommende Strömung laminar, dann gilt $k = 0$ und $\varepsilon = 0$. In der numerischen Rechnung führt diese Bedingung zu Schwierigkeiten beim Start der Rechnung, weshalb ein kleiner Turbulenzgrad $T_u \sim 10^{-2}$ mit $T_u = \sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}/U$ und U der Grundströmung, vorgegeben wird. Aus Experimenten oder Erfahrungswerten ist manchmal der Turbulenzgrad bekannt und mittels dieser Größe kann für k folgende Abschätzung angegeben werden:

$$k \approx T_u^2 \overline{v_j'^2}.$$

Ein Problem stellt sich bei der Vorgabe der Dissipationsrate ε , da diese Größe in der Regel nicht direkt messbar ist. In der Literatur wird deshalb häufig auf ein physikalisch interpretierbares turbulentes Längenmaß L_T (Maß für die Größe der Wirbel in der turbulenten Strömung) zurückgegriffen und durch einen Schätzwert vorgegeben. Hieraus kann dann ε gemäß

$$\varepsilon \approx \frac{k^{\frac{2}{3}}}{L_T}$$

bestimmt werden. Ungenauigkeiten in den Einstromwerten von k und ε machen sich nicht allzu negativ bemerkbar, da in den Gleichungen die Quellterme dominieren, so dass die Produktionsrate stromabwärts vergleichsweise groß ist.

2. Ausström-/ Symmetrieränder: Hier sind Verträglichkeitsbedingungen zu definieren, die die Randwerte als Funktion der inneren Lösung ausdrücken. Als einfachster Fall wird für k und ε eine verschwindende Normalableitung in Richtung des Ausströmrandes angenommen.
3. Feste Wände: Im Bereich einer Wand existiert eine sehr dünne, laminare Unterschicht in der die Annahmen des Turbulenzmodells nicht mehr gelten. Eine Möglichkeit wäre, diese Schicht durch ein hinreichend feines Gitter aufzulösen und zusätzliche Modifikationen des Modells vorzunehmen (s. Modell für niedrige Reynolds-Zahlen). Da die laminare Schicht mit wachsender Reynolds-Zahl immer schmaler wird, ist diese Vorgehensweise bei größeren Re -Zahlen nicht mehr praktikabel, da dies eine viel zu große Anzahl von Gitterpunkten zur Folge hätte. Bei einer Formulierung für hohe Reynolds-Zahlen kann die Integration der Modellgleichungen unter Berücksichtigung des abschätzbar universellen Verhaltens der Strömung in Wandnähe vermieden werden und so die laminare Schicht überbrückt werden.

(a) Modell für hohe Reynolds-Zahlen

Durch die Verwendung des logarithmischen Wandgesetzes, wonach sich die Geschwindigkeit gerade außerhalb der laminaren Unterschicht in einem gewissen Bereich logarithmisch verhält

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+ E) , \quad (3.36)$$

können geeignete Werte für k und ε formuliert werden [38]. Hierbei werden für die Von Karmansche Konstante κ und den Rauheits Parameter E für glatte Wände die Werte $\kappa \approx 0.4$ bzw. $E \approx 9$ angegeben. y^+ und u^+ sind dimensionslose Größen für den Wandabstand δ bzw. die tangentielle Komponente der Geschwindigkeit \bar{v}_t :

$$y^+ = \frac{u_\tau \delta}{\nu} \quad \text{und} \quad u^+ = \frac{\bar{v}_t}{u_\tau}$$

mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit bzw. der Wandschubspannung

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \tau_w = \rho \nu \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial x_j} n_j.$$

Unter der Annahme lokalen Gleichgewichts von Produktion und Dissipation turbulenter kinetischer Energie und eines konstanten Verlaufs der Reynoldsschen Spannungen lassen sich für k und ε in einem Bereich von etwa

$$30 \leq y^+ \leq 300$$

folgende wandnahe Beziehungen angeben:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa x_j n_j}$$

Damit liegen die Beziehungen für einen wandnahen Punkt zur Bestimmung der Randbedingungen fest.

(b) Modell für niedrige Reynolds-Zahlen

Bei kleinen Reynolds-Zahlen oder in der viskosen Unterschicht verliert die Annahme des logarithmischen Wandgesetzes ihre Gültigkeit und das oben beschriebene Randbedingungskonzept kann so nicht eingesetzt werden. Neben der jetzt notwendigen räumlichen Auflösung der Grenzschicht sind einige Modifikationen der $k - \varepsilon$ -Transportgleichungen erforderlich, die im wesentlichen aus Wand-Dämpfungstermen bestehen. Damit wird sichergestellt, dass bei kleinen Reynolds-Zahlen oder in laminaren Schichten die Spannungen aus turbulenten gegenüber denen molekularen Ursprungs an Bedeutung verlieren. Einen Überblick liefert z. B. *Patel* [50] Die Transportgleichungen für das Modell niedriger Reynolds-Zahlen erhalten damit die Form

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_k k - \left(\nu + \frac{\nu_t}{P_{r_k}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] = \mathbf{P} - \varepsilon \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{v}_k \varepsilon - \left(\nu + \frac{\nu_t}{P_{r_\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] = C_{\varepsilon 1} f_1 \mathbf{P} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.38)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.39)$$

Die Wand-Dämpfungsterme f_μ, f_1 und f_2 sind ihrerseits Funktionen der turbulenten Reynolds-Zahl $Re_t = \frac{U_T L_T}{\nu} = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$ sowie des Parameters $Re_y = \frac{k^{1/2} y}{\nu}$ und werden inklusiv weiterer empirischer Größen beispielsweise in [35] angegeben mit:

$$f_\mu = [1 - \exp(-0.0165 Re_y)]^2 \left(1 + \frac{20.5}{Re_t} \right); \quad (3.40)$$

$$f_1 = \left(1 + \frac{0.05}{f_\mu} \right)^3; \quad f_2 = 1 - \exp(-Re_t^2) \quad (3.41)$$

Die Randbedingungen der turbulenten Größen können jetzt formuliert werden zu

$$\bar{v}_j = 0; \quad k = 0; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j = 0. \quad (3.42)$$

4 Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen

Die numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen findet im diskreten Raum statt. Das Integrationsgebiet wird dabei in ein Gitternetz im Raum der unabhängigen Variablen unterteilt, und um jede Stützstelle im Gitter werden Kontrollvolumina definiert, auf denen die diskretisierten Erhaltungsgleichungen formuliert werden. Die Änderung einer in einem Kontrollvolumen eingeschlossenen Menge einer Strömungsgröße entspricht nun dem Transport der gleichen Größe durch die Oberfläche des Volumens (Finite-Volume Methode). Diese Methode spiegelt die integrale Formulierung der Erhaltungsgleichung (2.1) wider.

Aufgrund der endlichen Gitterpunktzahl im diskreten Raum muss das Oberflächenintegral $\oint_A \vec{H} \cdot \vec{n} dA$ als Summe angenähert werden, und das Volumenintegral $\int_V \frac{\partial}{\partial t} \vec{Q} dV$ wird aus dem Produkt von Kontrollvolumengröße und zeitlichen Differenzenquotienten gebildet. Die diskrete Strömungsgleichung erhält damit die Form

$$\left. \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} \right|_{V_i} + \text{Res}(\vec{Q})_{\Delta, V_i} = \vec{F}_{\text{Vol}, V_i} \quad (4.1)$$

und die diskreten Residuen werden aus den jeweiligen mehrflächigen Kontrollvolumina zusammengesetzt berechnet:

$$\text{Res}(\vec{Q})_{\Delta, V_i} = \frac{1}{V_{V_i}} \sum_{k=1}^n \vec{H}_k \vec{n}_k \Delta A_k \quad (4.2)$$

V_i ist hierbei das Kontrollvolumen der Größe V_{V_i} der Stützstelle i , und die Summe wird über alle k Segmente der Kontrollvolumenberandung gebildet. $\vec{H}_k \vec{n}_k \Delta A_k$ ist das Produkt aus dem Flussvektor, dem Normalenvektor und der Fläche eines Segments der Kontrollvolumenberandung. Bei dieser Formulierung ist es demnach wichtig, dass die Berandungen der Kontrollvolumina fehlerfrei den zugehörigen Gitterpunkt umschließen.

Für die Anordnung der Kontrollvolumina im Gitternetz existieren verschiedene Möglichkeiten, die sich durch die Orte, an denen die Lösung berechnet wird, unterscheiden. Je nach Anwendungszweck haben die verschiedenen Anordnungen ihre spezifischen Vor- und Nachteile, d. h. es kann keine grundsätzliche Entscheidung in der Auswahl festgelegt werden [73]. Im Allgemeinen werden drei Diskretisierungskonzepte unterschieden (s. Abb. (4.1)):

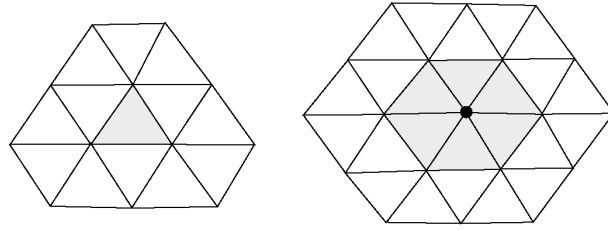


Abb. 4.1: Diskretisierungskonzepte: Zellzentriert (links) und Zelleckzentriert (rechts)

- Zellzentriert: Die Elemente des Gitters bilden selbst die Berandung des Kontrollvolumens, und die Variablen werden elementweise abgelegt.
- Knotenzentriert: Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten die Kontrollvolumina zu bilden. Beispielsweise können die Verbindungen der Mittelpunkte (Schwerpunkte oder die geometrischen Mittelwerte) der angrenzenden Elemente ein geeignetes Kontrollvolumen bilden. Die Variablen werden knotenweise gespeichert. Auf dieses Konzept wird im folgenden näher eingegangen.
- Zelleckzentriert: Die Kontrollvolumina bestehen aus den an den jeweiligen Knoten anhängenden Elementen. Damit ergeben sich überlappende Kontrollvolumina. Die Variablen werden knotenweise gespeichert. Die ursprüngliche Idee ist eine Kombination der erstgenannten Methoden.

Die verwendeten Diskretisierungen in dieser Arbeit basieren auf einer knotenzentrierten Formulierung. Die Abb. (4.2) verdeutlicht das knotenzentrierte Konzept und zeigt die facettierte Berandungsfläche der korrespondierenden Nachbarknotenpunkte P_i und P_j im Dreidimensionalen.

Das Verfahren ist auf die Unversehrtheit der Kontrollvolumina angewiesen, was folglich auch für die Ränder der Berechnungsgebiete gelten muss. Zum Schließen der Bilanzen werden daher geeignete Flüsse über die Randflächen der Gitter formuliert. Dazu werden für den Randpunkt P_i (s. Abb. (4.3)) halbe Kontrollvolumina gebildet, die mit dem Berechnungsrand geschlossen werden. Die Flussanteile über die Randflächen gehen bei der Bilanzierung also mit ein. Prinzipiell können zwei verschiedene Arten von Randflussformulierungen unterschieden werden - durchströmte Wände erfordern die Berechnung vollständiger Flussvektoren und undurchlässige Körperoberflächen erlauben keinen konvektiven Flusstransport über die Berechnungsgrenze.

Zu unterscheiden sind damit Kontrollvolumina im Feld, an durchströmten Rändern und an festen Wänden

Für eine effektive Verteilung der Punkte im Rechenggebiet kann generell zwischen einer strukturierten bzw. unstrukturierten Vorgehensweise bei der Gittergenerierung unterschieden werden (s. Kap. 7). Einige grundlegende Entwicklungen wurden im Rahmen dieser Arbeit auf nichtorthogonalen, randangepassten, strukturierten Gittern begonnen. Für diesen Fall wurden die Erhaltungsgleichungen in allgemeine Koordinaten transformiert (s. A.3).

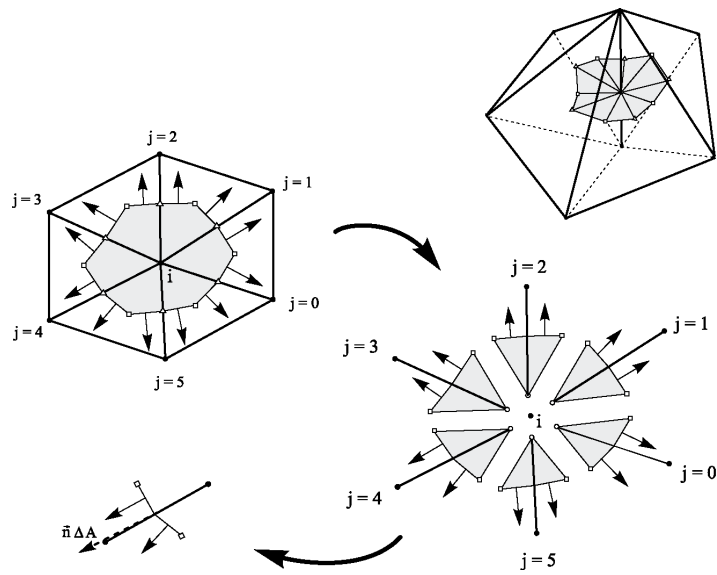


Abb. 4.2: Diskretisierungskonzept: Knotenzentriert. Übertragung ins Dreidimensionale (oben rechts)

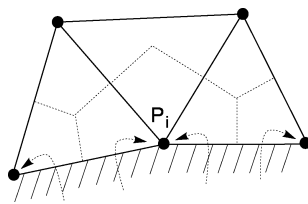


Abb. 4.3: Flussformulierung an den Rändern der Kontrollvolumina

4.1 Diskretisierung der räumlichen Flüsse

4.1.1 Diskretisierung der reibungsfreien Terme

Die größten Schwierigkeiten bei der Lösung der Navier-Stokes Gleichungen entstehen im Wesentlichen durch die nichtlinearen, konvektiven Terme, deren Diskretisierung zweckmäßigerweise von den diffusiven Termen getrennt erfolgt (s. Kap. 4.1.2).

Durch die Einführung der künstlichen Kompressibilität sind die Massen- und Impulserhaltungsgleichungen ähnlich wie bei kompressiblen Fluiden gekoppelt, und effizienten Lösungsalgorithmen kompressibler Strömungen können übernommen werden. Das Gleichungssystem für künstlich kompressible, reibungsfreie Strömungen ist damit hyperbolischen Typs. Bei der Diskretisierung ist es wünschenswert, die Richtung der charakteristischen Informationsausbreitung zu berücksichtigen (Upwind-Diskretisierungen). Im Rahmen dieser Arbeit ist von den verschiedenen Upwind-Konzepten das Flux-Difference Splitting nach Roe[54] verwendet worden, bei dem der numerische Fluss in einen zentral formulierten Anteil und einen Upwindterm aufgespalten wird. Der Upwindterm wird zum zentralen Fluss hinzu addiert, so dass je nach Charakteristik der numerische Fluss zu einer einseitigen Upwindformulierung wird. Der Upwindterm wirkt als Dämpfungsterm für die bei zentralen Differenzen auftretenden numerischen Schwingungen. Im Folgenden soll die Herleitung kurz skizziert werden:

Das Flux-Difference Splitting kann anschaulich anhand der eindimensionalen Formulierung der Gleichungen für die künstliche Kompressibilität in quasilinearer Form für kartesische Koordinaten dargestellt werden:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{Q}} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \beta^2 u \\ u^2 + p \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Hierzu lässt sich die charakteristische Form mit Hilfe der Eigenvektormatrix \mathbf{R} angeben durch

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = 0 \quad \text{mit} \quad d\vec{W} = \mathbf{R}^{-1} d\vec{Q} \quad \text{und} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u + \sqrt{u^2 + \beta^2} & 0 \\ 0 & u - \sqrt{u^2 + \beta^2} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

der Diagonalmatrix der Eigenwerte. Mit der Aufteilung der Eigenwertmatrix in $\mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-$ und entsprechenden Variablenextrapolationen von links bzw. von rechts (\vec{W}^+ bzw. \vec{W}^-) an die Stellen $i \pm \frac{1}{2}$ lautet die diskrete charakteristische Form

$$\frac{\Delta \vec{W}_i}{\Delta t} + \mathbf{\Lambda}^+ \frac{\vec{W}_{i+1/2}^+ - \vec{W}_{i-1/2}^+}{\Delta x} + \mathbf{\Lambda}^- \frac{\vec{W}_{i+1/2}^- - \vec{W}_{i-1/2}^-}{\Delta x} = 0 \quad (4.6)$$

Mit Hilfe der Beziehung $\Lambda^\pm = \frac{1}{2}(\Lambda \pm |\Lambda|)$ und einer Rücktransformation zu konservativen Variablen ergibt sich:

$$\frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} + \frac{\vec{E}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{E}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0$$

mit der numerischen Flussbeziehung:

$$\vec{E}_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}(\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^+) + \vec{E}(\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^-) \right) + \frac{1}{2} |\mathbf{A}(\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}})| \left(\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^+ - \vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^- \right) \quad (4.7)$$

Die Matrix $|\mathbf{A}|$ wird im Allgemeinen als Roe-Matrix bezeichnet und mit den Beträgen der Eigenwerte gebildet:

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1}.$$

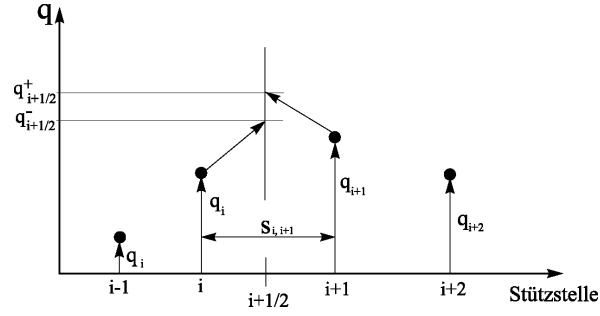
Für die Roe-Mittelwerte $\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^-$ wird eine aufwändige Mittelwertbildung angegeben ([54]), die hier für die Anwendung auf künstlich kompressible Strömungen durch eine arithmetische Mittelung ersetzt wird. Da die Bestimmung der Matrix $|\mathbf{A}|$ relativ rechenzeitintensiv ist, führt *Turkel* eine Aufspaltung der Matrix nach der Richtung des konvektiven Informationstransportes ein, die ermöglicht, nur die Elemente zu bestimmen, die jeweils benötigt werden.

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^- \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^\pm = \mathbf{R} \Lambda^\pm \mathbf{R}^{-1}$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in die Standard-Flussformulierung nach Roe und einer gezielten Umformung entsprechend einer Fallunterscheidung für $u > 0$ bzw. $u < 0$ erhält man einen vereinfachten Ausdruck zur Flussbestimmung in Abhängigkeit von der Richtung der Normalgeschwindigkeit an den Stellen $i \pm \frac{1}{2}$:

$$\vec{E}_{i\pm\frac{1}{2}} = \begin{cases} \vec{E}_{i\pm\frac{1}{2}}^+ + \mathbf{A}^-(\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^- - \vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^+) & \text{für } u > 0 \\ \vec{E}_{i\pm\frac{1}{2}}^- - \mathbf{A}^+(\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^- - \vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^+) & \text{für } u < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Schließlich müssen noch die Werte für $\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^+$ bzw. $\vec{Q}_{i\pm\frac{1}{2}}^-$ geeignet auf die Kontrollvolumenflächen projiziert werden. Die Annahme konstanter Werte der Variablen im Volumen entspräche einer Interpolation nullter Ordnung, das zu einem sehr dissipativen Schema erster Ordnung führt. Eine Reduzierung der numerischen Dissipation


 Abb. 4.4: Extrapolation der Variablenwerte q auf die Kontrollvolumengrenze

lässt sich durch die geeignete Bildung des Gradienten ∇q , mit q einer Variablen im Flussvektor, erreichen (s. Abb. (4.4)):

$$q_{i+\frac{1}{2}}^+ = q_i + \frac{1}{2} \nabla q_i \cdot \vec{s}_{i,i+1} \quad (4.9)$$

$$q_{i+\frac{1}{2}}^- = q_{i+1} + \frac{1}{2} \nabla q_{i+1} \cdot \vec{s}_{i,i+1} \quad (4.10)$$

Im Fall der unstrukturierten Formulierung werden die Gradienten mit Hilfe eines Gauss-Ansatzes oder der Methode des kleinsten Fehlerquadrats (Least-Square-Method) bestimmt (s. [20], [73]).

Für die strukturierte Formulierung wurde ein 2. Ordnung genaues Extrapolationsverfahren nach van Leer ([72], Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws, MUSCL) verwendet. Auf nichtorthogonalen Gittern verwendet ergibt sich mit den von rechts (Δq^-) bzw. von links (Δq^+) gebildeten Differenzen die unten stehende Berechnungsvorschrift für beispielsweise eine Extrapolation von links (s. auch Abb. (4.5)):

$$q_{i+\frac{1}{2}}^+ = q_i + \left(\frac{\Delta s^+}{\Delta s^+ + \Delta s^-} \right)_i \left(\frac{\Delta q^+ \Delta s^- + \Delta q^- \Delta s^+}{\Delta s^+ + \Delta s^-} \right)_i \quad (4.11)$$

4.1.2 Diskretisierung der Reibungsterme

Bei der Finite-Volumen Diskretisierung der Reibungsterme müssen die Komponenten des viskosen Anteils der Flussvektoren \vec{E}_{vis} , \vec{F}_{vis} , \vec{G}_{vis} (s. A.2) berechnet werden. Zweckmäßiger Weise erfolgt die Diskretisierung zentral, d. h. die Terme werden aus gemittelten Variablenwerten gebildet. Sofern das gesondert berechnete Gradientenfeld verfügbar ist, wird der Mittelwert aus den Gradienten der Kontrollvolumina für ihre gemeinsame Kante gebildet und damit die viskosen Flüsse berechnet. Die zentrale Diskretisierung findet man in fast allen Navier-Stokes Lösern, da sie dem elliptischen Charakter der viskosen Terme am ehesten gerecht wird.

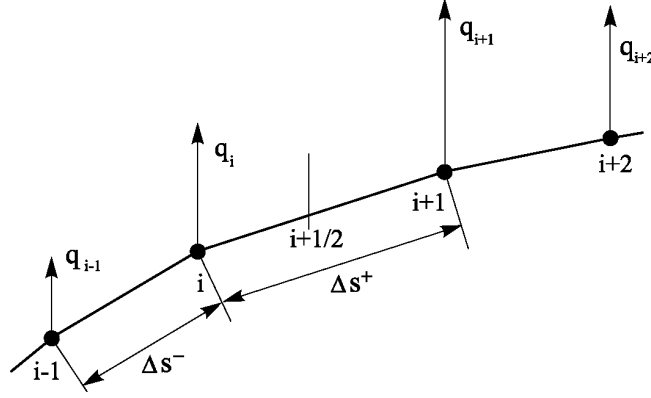


Abb. 4.5: MUSCL Extrapolation auf strukturiertem, nichtorthogonalem Gitter

4.1.3 Diskretisierung der Reynolds-gemittelten Gleichungen

Die Kontinuitäts-Gleichung Gl. 3.10 und die Impulsgleichung Gl. 3.11 der Reynolds-gemittelten Gleichungen besitzen die gleiche mathematische Struktur wie die entsprechenden Gleichungen laminarer Strömung, sodass das für diese hergeleitete numerische Lösungskonzept direkt übertragen werden kann. In den Impulsgleichungen ist lediglich die molekulare Viskosität ν durch die effektive Viskosität $\nu_{eff} = \nu + \nu_t$ zu ersetzen. Der hauptsächliche Unterschied besteht in der zusätzlichen Lösung zweier Transportgleichungen.

Die turbulenten Transportgleichungen (3.23) und (3.24) enthalten neben den Strömungs- und Diffusionszeitskalen turbulente Zeitskalen $\sim L_T/U_T$ (s. Kap. 3.1.2), die im Allgemeinen wesentlich kleiner als Erstere sind. Hieraus folgt eine größere Steifheit dieses Differentialgleichungssystems, was auf ineffizient kleine Zeitschritte führt.

Entsprechend einer numerischen Stabilitätsbetrachtung würde daher ein explizites Lösungsverfahren nur mit sehr kleiner Zeitschrittweite voranschreiten können. Um dieses zu verhindern aber trotzdem eine aufwendige implizite Bestimmung des gesamten Residuums zu umgehen, wird für die turbulenten Transportgleichungen folgendes Operator-Splitting eingeführt:

$$\frac{\vec{Q}^{(1)} - \vec{Q}^{(n)}}{\Delta t} + L_1(\vec{Q}^{(n)}) = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\vec{Q}_t^{(n+1)} - \vec{Q}_t^{(1)}}{\Delta t} + L_2(\vec{Q}_t^{(n+1)}) = 0 \quad (4.13)$$

mit dem Vektor der turbulenten Transportgrößen $\vec{Q}_t = (k, \varepsilon)^T$. Der Operator $L_1(\vec{Q}^{(n)})$ enthält alle konvektiv-diffusiven Terme und die Gleichung (4.12) entspricht wieder der Transportgleichungsform, die mittels der in Kapitel 4.1 formulierten Upwind Methoden gelöst werden kann. Die Gleichung (4.13) enthält alle turbulenten Quellterme, die

zwecks besserer Stabilität implizit formuliert gelöst wird. Aufgrund der Nichtlinearität des Operators $L_2(\vec{Q}_t^{(n+1)})$ kann die Gleichung (4.13) allerdings nicht direkt gelöst werden. Die turbulenten Terme werden deshalb in der Zeit in eine Taylorreihe entwickelt mit

$$L_2(\vec{Q}_t^{n+1}) = L_2(\vec{Q}_t^{(1)}) + \frac{\partial L_2(\vec{Q}_t)}{\partial \vec{Q}_t} \Delta \vec{Q}_t. \quad (4.14)$$

Die partielle Ableitung $(\partial L_2 / \partial \vec{Q}_t)$ entspricht der Funktionalmatrix des Operators $L_2(\vec{Q}_t^{(n+1)})$ und kann für das $k - \varepsilon$ Modell wie folgt angegeben werden:

$$\frac{\partial L_2(\vec{Q}_t)}{\partial \vec{Q}_t} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\mathbf{P}C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k^2} + C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k^2} & \mathbf{P}C_{\varepsilon 1} \frac{1}{k} - 2C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Die implizite Formulierung erhält damit folgende Form:

$$\Delta \vec{Q}_t \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} + \mathbf{L} \right] = -L_2(\vec{Q}_t^{(1)}) \quad (4.16)$$

Hierbei sind die turbulenten Terme unabhängig von den örtlichen Nachbarn lokal eingefroren.

4.2 Integration in der Zeit

Die Gleichung (4.1) sei die Ausgangsgleichung für die zeitliche Diskretisierung, wobei der Vektor $\text{Res}(\vec{Q})$ alle Flussvektoren vereint und symbolisch für die räumliche Diskretisierung steht.

Eines der meistverwendesten und auch hier implementierten expliziten Integrationsverfahren zur Lösung der Erhaltungsgleichungen ist das Runge-Kutta Verfahren, welches ursprünglich zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen dient und auf partielle Differentialgleichungen übertragen werden kann [31].

Bei diesem Verfahren ist die Zeit- und Ortsdiskretisierung voneinander getrennt. Die Lösung der diskretisierten Gleichung (4.1) für einen Zeitschritt erfolgt in mehreren

expliziten Teilschritten (Index k), wobei sich in der Strömungsmechanik folgendes K -Schritt Schema bewährt hat [21]:

$$\begin{aligned}
 \vec{Q}_i^{(0)} &= \vec{Q}_i^n \\
 \vec{Q}_i^{(1)} &= \vec{Q}_i^{(0)} - \alpha_1 \cdot \Delta t \cdot \text{Res}_i(\vec{Q}_i^{(0)}) \\
 &\vdots \\
 \vec{Q}_i^{(k-1)} &= \vec{Q}_i^{(0)} - \alpha_{k-1} \cdot \Delta t \cdot \text{Res}_i(\vec{Q}_i^{(k-2)}) \quad k = 1 \dots K \\
 \vec{Q}_i^{(k)} &= \vec{Q}_i^{(0)} - \alpha_k \cdot \Delta t \cdot \text{Res}_i(\vec{Q}_i^{(k-1)}) \\
 &\vdots \\
 \vec{Q}_i^{(n+1)} &= \vec{Q}_i^{(k)}
 \end{aligned}$$

Im Allgemeinen variiert die Zahl der Schritte K zwischen 3 und 5. In dieser Arbeit sind 3- bzw. 5-Schritt Verfahren gewählt angewendet worden, wobei für die Faktoren α_k die folgenden für Upwind-Schemata bewährten Koeffizientenansätze verwendet werden:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 0.059; \alpha_2 = 0.14; \alpha_3 = 0.273; \alpha_4 = 0.5; \alpha_5 = 1.0 \quad (5\text{-Schritt}) \\
 \alpha_1 &= 0.25; \alpha_2 = 0.5; \alpha_3 = 1 \quad (3\text{-Schritt})
 \end{aligned}$$

Für stationäre Lösungen kann das Verfahren durch die Verwendung lokaler Zeitschritte künstlich beschleunigt werden. Die Zeitschrittweite Δt wird hierbei lokal durch die numerische Stabilität festgelegt, d.h. es wird mit dem örtlich maximal möglichen Zeitschritt gerechnet, dessen Schrittweite durch eine vorgegebene Courantzahl C bestimmt wird:

$$\Delta t = C \cdot \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{|\lambda|_{\max}} \quad (4.17)$$

Die geeigneten Werte für C sind stark vom Berechnungsfall abhängig und liegen etwa zwischen $C = 0.1 - 0.8$. Bei der Verwendung des lokalen Zeitschritts ist das Verfahren nicht mehr konsistent in der Zeit, die stationäre Lösung ($\text{Res}(\vec{Q}) = 0$) wird dadurch jedoch nicht beeinflusst. Bei lokaler Ausnutzung der Stabilitätsschranke des expliziten Schemas wird die jeweils größte numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit ausgenutzt.

5 Strömungen mit freier Oberfläche

Eine Besonderheit bei der Simulation der Schiffsumströmung ist die freie Oberfläche, die Trennfläche zwischen Wasser und Luft, an der die kinematische und dynamische Randbedingung erfüllt werden muß.

Die kinematische Bedingung fordert eine Undurchdringlichkeit der Trennfläche, woraus für die Fluidgeschwindigkeiten folgt:

$$\vec{v}_w \cdot \vec{n} = \vec{v}_l \cdot \vec{n} \quad (5.1)$$

wobei die Indizes w und l die Fluide Wasser bzw. Luft bezeichnen ¹.

Die dynamische Bedingung folgt aus dem Kräftegleichgewicht normal und tangential zur Trennfläche. Wird aufgrund der zu erwartenden relativ großen Krümmungsradien der Trennfläche die Oberflächenspannung vernachlässigt und die viskosen Terme als verschwindend gering betrachtet, vereinfacht sich die dynamische Bedingung zu einer Druckbedingung normal zur Trennfläche:

$$p_w = p_l = p_a \quad (5.2)$$

mit dem konstanten, atmosphärischen Druck p_a . Unter Verwendung des hydrodynamischen Druckes (s. Gl.(2.2.1)) ergibt sich die Formulierung

$$p = p_a + \frac{y_s}{Fr^2} \quad (5.3)$$

mit y_s der lokalen vertikalen Wellenerhebung.

Zur numerischen Erfassung der frei beweglichen Oberfläche existieren in der Literatur verschiedene Methoden wie z.B. in [24] [52], [34],[3], [18], [53] oder [43] beschrieben. Üblicherweise können hierbei die Lösungsmethoden in die Gruppen mit im Raum fixierten Gittern (Euler-Methoden) oder in Verfahren mit der Strömung mitbewegter Integrationsränder (Lagrange- bzw. Lagrange-Euler-Methoden) unterteilt werden.

Bei den letztgenannten Methoden ist die freie Oberfläche eine scharfe Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Gas, die mit dem Rand des Lösungsgebietes übereinstimmt und durch ein sich anpassendes Gitter verfolgt wird. Die Einbindung der Randbedingungen für eine vorgegebene Oberflächenlage ist relativ einfach durchzuführen, da die

¹ Um eine spätere Verwechslung mit den diskreten Werten zu verhindern, werden im Kapitel 5 die Gleichungen in der Vektorschreibweise notiert.

Gitterlinien konform mit der freien Oberfläche liegen. Die jeweils neue Position der Oberfläche wird meist mit Hilfe einer Gleichung für eine Höhenfunktion beschrieben, die aus der kinematischen Randbedingung abgeleitet wird. Erfahrungen haben gezeigt, dass für diese Bewegung und Kontrolle des Gitters im Inneren des Berechnungsgebietes ein besonders robustes Verfahren gefordert ist und prinzipiell Schwierigkeiten bei zunehmender Verformung der freien Oberfläche auftreten. Speziell bei komplexeren 3-D Geometrien in Oberflächennähe, wie sie beispielsweise im Hinterschiffsbereich auftreten, ist die Adaption des Gitters mit großem Rechenaufwand verbunden.

Bezüglich der Methoden auf feststehenden Gittern haben bereits in den 60er Jahren Harlow et al. [24] zur Simulation der freien Oberfläche Marker-Partikel eingeführt (MAC-Methode (*Marker and Cell*)). Die Lage der Marker entscheidet, ob eine Zelle zur freien Oberfläche gehört oder nicht. Der besondere Vorteil dieser Methode liegt darin, dass sogar brechende Wellen berechnet werden können. Im Laufe der Zeit wurden von der MAC-Methode ähnliche Methoden abgeleitet (z. B. SMAC [10] oder TUMMAC [42]).

Anfang der 80er Jahre haben Hirt und Nichols [28] die ‘Volume-of-Fluid-Method’ (VOF) vorgestellt. Hier wird die freie Oberfläche durch die Definition einer zusätzlichen skalaren Transportgleichung einer Fluidfunktion dargestellt. Diese Fluidfunktion, definiert als Volumenverhältnis des Fluids zum Zellvolumen (Volume of Fluid: VOF), besitzt physikalisch die sprunghafte Eigenschaft wie die diskontinuierliche Dichteänderung an der freien Oberfläche. Mathematisch wird die Funktion durch das Verschwinden ihrer substantiellen Ableitung in dem betrachteten Raum zu jeder Zeit beschrieben. Prinzipiell erlaubt diese Methode starke Verformungen der freien Oberfläche, bedarf allerdings durch den unstetigen Charakter der Fluidfunktion einer besonderen Behandlung bei der Integration. Entweder wird versucht, die Unstetigkeit scharf innerhalb einer Gitterzelle aufzulösen (z.B. [28]) oder die Funktion wird über mehrere Zellen ‘verschmiert’ (z.B. [32]).

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine auf der Level-Set Formulierung von Sussmann et al. [67] basierende Methode zur Behandlung von eingebetteten Diskontinuitäten in Strömungen verwendet und im Folgenden beschrieben.

5.1 Level-Set-Methode für freie Oberflächen

Eine freie Oberfläche kann mathematisch als Isofläche $\psi(x, y, z, t) = \text{const}$ einer skalaren Feldfunktion ψ beschrieben werden. Das totale Differential dieser Funktion führt auf eine Transportgleichung für die Position der freien Oberfläche, die gleichzeitig die kinematische Bedingung an der Oberfläche für $\psi = \text{const}$ erfüllt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

Diese Funktion ψ wird in der Literatur (s. z. B. in [62] und [67]) als *Level-Set-Funktion* bezeichnet. Die Lage der freien Oberfläche wird durch die Lösung der Gleichung (5.4) für den diskreten Wert

$$\psi_0(x, y, z, t) = 0 \quad (5.5)$$

bestimmt. Damit unterteilt die Funktion ψ_0 das Integrationsgebiet wie in Abb. (5.1) skizziert in die drei Bereiche:

$$\begin{aligned} \psi &> 0 \implies \text{Luft} \\ \psi &= 0 \implies \text{Trennfläche} \\ \psi &< 0 \implies \text{Wasser} \end{aligned}$$

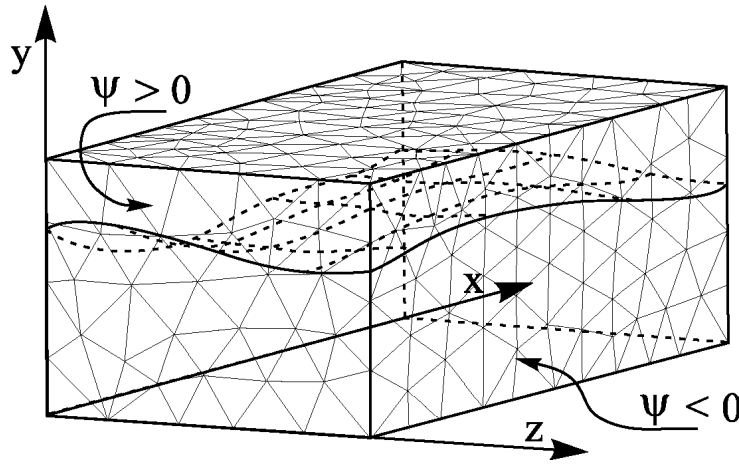


Abb. 5.1: Position der freien Oberfläche im Integrationsgitter

Die diskreten Werte für die Funktion ψ werden auf den Knoten des Berechnungsgitters gespeichert. Für die Gleichung (5.4) sind verschiedene Diskretisierungen denkbar:

- Finite-Volumen-Diskretisierung
- Finite-Differenzen-Diskretisierung

Die Finite-Volumen-Diskretisierung ist äquivalent zur Diskretisierung des Systems von Feldvariablen gemäß Gleichung (4.1), während eine Finite-Differenzen Diskretisierung auf einer kantenweisen Formulierung basiert. Letztere ist für die Ausbreitung von aktiv transportierten Diskontinuitäten entwickelt worden [70], bei denen die Ausbreitungsgeschwindigkeit \vec{c} der Diskontinuität nicht mit der Trägergeschwindigkeit \vec{v} übereinstimmt. Die freie Wasseroberfläche wird dagegen mit der lokalen Geschwindigkeit des Fluids transportiert, die man als Trägergeschwindigkeit ansehen kann, wonach gilt:

$$\vec{c} \equiv \vec{v}. \quad (5.6)$$

Aus Gründen einer einheitlichen Struktur zu den Erhaltungsgleichungen (s. Kap. 4) ist hier die Finite-Volumen Methode verwendet und aus Stabilitätsgründen eine Upwind-Formulierung gewählt worden. Bezogen auf die Gleichungen (4.1 u. 4.2) und mit der Definition des mittleren Geschwindigkeitsvektors des Fluids $\vec{v}_i = (u_i, v_i, w_i)^T$ für eine Kante i ergibt sich für den Fluss die einfache Beziehung:

$$\mathbf{H}_i = \begin{cases} \vec{v}_i \psi_{P1} & \text{for } \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i < 0 \\ 0 & \text{for } \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \\ \vec{v}_i \psi_{P1'} & \text{for } \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i > 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

mit ψ_{P1} und $\psi_{P1'}$, den in Kap. 4.1 beschriebenen Projektionen der Werte für Funktion $\psi(\vec{x}, t)$ jeweils aus der Richtung der Knoten $P1$ und $P1'$ (s. Abb. (5.2)). In der gegenwärtigen Methode wird eine lineare Extrapolation verwendet, um eine zweiter Ordnung genaue Rechnung zu erhalten.

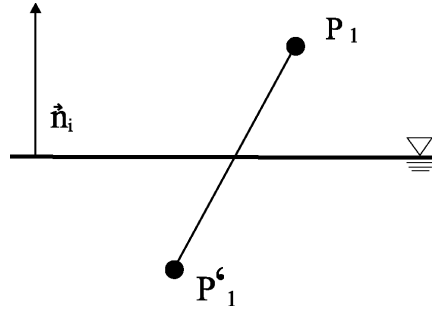


Abb. 5.2: Skizze zur Upwindformulierung für die Level-Set-Funktion

5.1.1 Reinitialisierung

Die skalare Funktion des Level-Sets ergibt zunächst nur für die Trennfläche $\psi = \psi_0$ einen physikalischen Sinn, ist aber im gesamten Integrationsgebiet definiert. Über die Konvektionsgleichung (5.4) wird der Level-Set in jedem diskreten Punkt mit der örtlichen Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} transportiert, wobei die Eindeutigkeit bzw. Genauigkeit dieses Transportschritts wiederum von den Eigenschaften der Level-Set Funktion selbst abhängt. Aufgabe der Reinitialisierung ist daher, das ψ -Feld für den nächsten Transportschritt geeignet neu zu belegen.

In Sussman et al[67] wird vorgeschlagen, die Level-Set Funktion ψ abseits der Fläche $\psi = \psi_0$ als Abstandsfunktion mittels linearisierter Taylorentwicklung zu definieren:

$$d\psi = \nabla\psi \cdot d\vec{x} = -\vec{n} \cdot d\vec{x} \cdot |\nabla\psi| = dx_n |\nabla\psi|, \quad \text{mit } d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Die Gleichung (5.8) besagt, dass die differenzielle Änderung von ψ proportional zum normalen Abstand dx_n der Isoflächen ψ und $\psi + d\psi$ ist. Soll die Änderung $d\psi$ identisch zum normalen Abstand sein, so muss die Gleichung

$$|\nabla\psi| = 1 \quad (5.9)$$

erfüllt sein.

Die Gleichung (5.9) der Abstandsfunktion bewirkt, dass die Differenz $\psi_{P_i} - \psi_0$ gleich dem normalen Abstand des Punktes P_i von der Isofläche ψ_0 (hier die freie Oberfläche) ist. Sie wird für alle Gitterpunkte außerhalb der Trennfläche gelöst. Nach [67] wird zunächst die Gleichung (5.4) mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit im ganzen Feld und anschließend die Abstandsfunktion (5.9) ebenfalls im ganzen Feld gelöst. Dadurch werden für die Gitterpunkte die ψ -Werte entsprechend ihrer normalen Entfernung von der Oberfläche reinitialisiert bzw. geglättet. Durch die Reinitialisierung werden sowohl die Position als auch die Geometrie der Isofläche ψ_0 nicht beeinträchtigt. Dafür wird die Differenzengleichung

$$1 - |\nabla\psi| = 0 \quad (5.10)$$

modifiziert zu

$$\psi^\nu = S(\psi^*) (1 - |\nabla\psi|) = S(\psi^*) \left(1 - \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2} \right) \quad (5.11)$$

Gleichung (5.11) wird iterativ bis zum stationären Zustand $\psi^\nu = 0$ gelöst. Dabei ist ψ^* die ψ -Verteilung nach der Lösung der Transportgleichung (5.4) und $S(\psi^*)$ eine Funktion, die das Vorzeichen von ψ^* wiedergibt. Sie ist von der Position der Trennfläche abhängig.

$$S(\psi^*) = \frac{\psi^* - \psi_0}{\sqrt{(\psi^* - \psi_0)^2 + \epsilon^2}} \quad (5.12)$$

ϵ ist ein kleiner numerischer Wert, der eine Division durch Null vermeiden soll. Durch die Vorzeichenfunktion werden Störungen von $1 - |\nabla\psi| \neq 0$ in Richtung $1 - |\nabla\psi| = 0$ geglättet.

Sofern bei der Schiffsumströmung die freie Wasseroberfläche im Sinne der Level-Set Formulierung als eine ungeteilte, einzelne Isofläche darstellbar ist und für viele Anwendungsfälle steile oder brechende Wellenformen unberücksichtigt bleiben können, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein alternativer Renormalisierungsansatz mit Hilfe einer Grundorientierung formuliert. Eine relativ einfache, prinzipiell vorhandene

Grundorientierung liefert die feste vertikale Richtung der Erdbeschleunigung \vec{g} . Die entsprechende Abstandsfunktion kann damit angegeben werden zu:

$$\nabla\psi \cdot \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} = 1 \quad (5.13)$$

Bei bekannter Position der Isofläche für $\psi = 0$ zwischen den Knotenpunkten $P1$ oberhalb und $P1'$ unterhalb der Oberfläche können die normalisierten Werte $\psi(P1)$ bzw. $\psi(P1')$ einfach gemäß ihres lokalen Abstandes zur Oberfläche gesetzt werden. Besitzt ein Überwasserknotenpunkt mehrere Verbindungen zu Unterwasserknoten, wird ein dem Abstand entsprechender Mittelwert gebildet. Bleibt die Frage offen, wie die Werte für alle Knotenpunkte in weiter entfernten Nachbarschaftsbeziehungen gefunden werden können.

Aus Stabilitätsgründen ergibt sich bei der expliziten Formulierung eine Schrittweite von maximal einem Nachbarschaftslevel und die Genauigkeit des Transportschrittes für die Gleichung (5.4) ist lediglich durch die nächstliegenden drei Nachbarschaftslevel definiert (zwei für die Isofläche selbst und der dritte für die Gradienten bei der Upwindformulierung). Alle ψ -Werte weiter entfernter Knotenpunkte sind nicht von Interesse, allerdings haben Testrechnungen gezeigt, dass mindestens die entsprechende Zugehörigkeit Wasser-Luft erfüllt sein sollte, da sich die innere Druckrandbedingung (s. Kap. 5.1.3) daran orientiert. Von einer konsistenten Feld-Initialisierung ausgehend, kann der explizite Normalisierungsschritt wie folgt angegeben werden:

$$\psi_i = \frac{\sum_{k \in k_n^m} (\vec{m}_{i,j(k)} \cdot \vec{g})(\psi_{j(k)} + 1)}{\sum_{k \in k_n^m} (\vec{m}_{i,j(k)} \cdot \vec{g})} \quad (5.14)$$

In dieser Gleichung wird die Summe über alle die Kanten gebildet, die mit dem Knotenpunkt i verbunden sind und deren zugehörige Verbindungspunkte $j(k)$ näher an der Oberfläche liegen, als der Punkt i selbst. Der entsprechende Kantenvektor sei hier mit $\vec{m}_{i,j(k)}$ bezeichnet.

Mit dieser Formulierung bleibt die Normalisierungsprozedur rein hyperbolisch und es hat sich gezeigt, dass die Reihenfolge der Werteaktualisierung bei sinnvoll gewählten Anfangsbedingungen eine untergeordnete Rolle spielt, was der unstrukturierten Formulierung entgegenkommt.

5.1.2 Lokalisierung der Oberfläche

Die Lage \vec{x}_s der freien Oberfläche kann durch Interpolation der ψ -Variable für den speziellen Wert $\psi = 0$ (Abb. (5.4)) und anschließender Interpolation der Ortskoordinaten bestimmt werden.

$$\vec{x}_s = \vec{x}_i + (\vec{x}_j - \vec{x}_i) \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{(\psi_i - |\psi_i|) - (\psi_j - |\psi_j|)}{\psi_i - \psi_j} \quad (5.15)$$

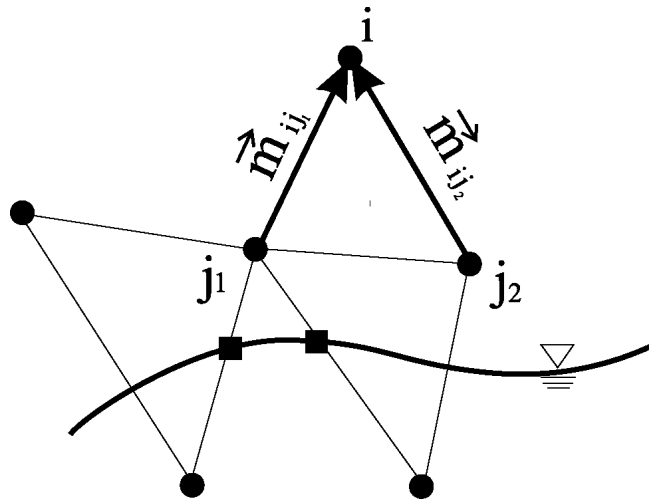


Abb. 5.3: Veranschaulichung der Bezeichnungen zur Normalisierung

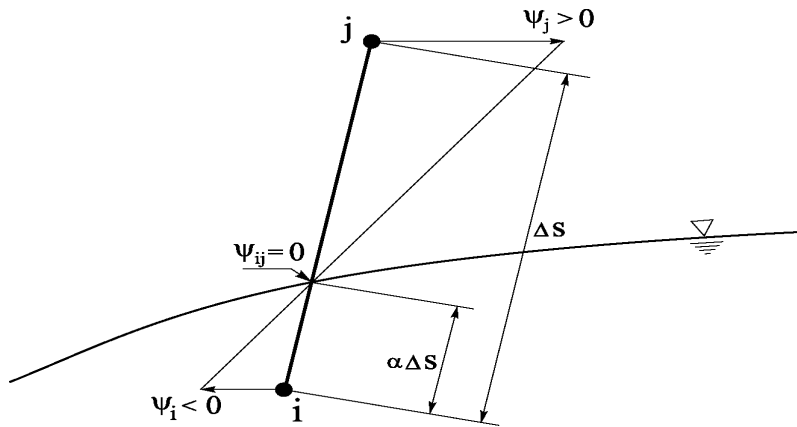


Abb. 5.4: Lokalisierung der freien Oberfläche durch Interpolation von ψ

5.1.3 Implementierung der dynamischen Randbedingung

Prinzipiell können mit Hilfe des Level-Set Ansatzes Strömungen mit beliebigen Phasengrenzflächen relalisiert werden. Der Rahmen dieser Arbeit beschränkt sich auf die einzige Phasengrenzfläche Wasser-Luft mit den eingangs erwähnten Vernachlässigungen von Reibungs- und Oberflächenspannungseffekten. Aus Sicht der Schiffsumströmung kann für nichtbrechende Wellen der Stömungszustand der Luftphase unbetrachtet bleiben, so dass die Gitterpunkte oberhalb der Wasseroberfläche als Hilfsknotenpunkte für die Formulierung der verbleibenden inneren Druckrandbedingung verwendet werden können. Allerdings kann nun diese Bedingung nicht unmittelbar an der freien Oberfläche gesetzt werden, da diese nicht zwangsläufig mit den Gitterpunkten, an deren Position die Variablenwerte abgelegt werden können, zusammenfallen. Stattdessen wird der Druck auf den Knotenpunkten der ersten Nachbarschaftsebene entsprechend rekonstruiert.

Diese Rekonstruktion des Oberflächendruckes spielt eine zentrale Rolle bezüglich der Genauigkeit und Robustheit des Verfahrens, so dass eine ganze Reihe von unterschiedlichen Formulierungen untersucht wurden. Die derzeit verwendete Methode sei im folgenden vorgestellt.

Testrechnungen haben gezeigt, dass der lokale Druckgradient aufgrund seiner Präsenz in den Impulsgleichungen das Geschwindigkeitsfeld zum neuen Zeitschritt beeinflusst und zu Stabilitätsproblemen führen kann. In der Kombination mit der Druckkopplung mittels der Methode der künstlichen Kompressibilität, wird daher versucht, den Druckgradienten bei der diskreten Druckrekonstruktion so weit wie möglich unverändert zu lassen. Von der Wasserseite aus wird also mit Hilfe des Druckgradienten ein Druck an die Oberfläche projiziert und mit dem Sollwert des konstanten Außendrucks $\tilde{p}^0(h)$ ein Korrekturwert $\Delta\tilde{p}_K^*$ bestimmt. Für jede Kante K mit der Richtung des Vektors $\vec{m}_{i,j}$ (s. Abb. (5.5)), die die Oberfläche durchstößt, wird diese Druckdifferenz an der Oberfläche wie folgt bestimmt:

$$\Delta\tilde{p}_K^* = \tilde{p}_i + (\nabla\tilde{p} \cdot \vec{m}_{i,j}) \frac{\psi_i}{\psi_i - \psi_j} - \tilde{p}^0(h) \quad (5.16)$$

Sofern lediglich eine einzelne Kante die Knotenpunkte der ersten Nachbarschaftsebene die Oberfläche durchstößt, kann der Wert $\Delta\tilde{p}_K^*$ unmittelbar zur Korrektur auf beiden Seiten der Grenzfläche verwendet werden:

$$\tilde{p}_i^{\text{corr}} = \tilde{p}_i + \Delta\tilde{p}_K^* \quad (5.17)$$

$$\tilde{p}_j^{\text{corr}} = \tilde{p}_j + \Delta\tilde{p}_K^* \quad (5.18)$$

mit $\tilde{p}_{i,j}^{\text{corr}}$, den korrigierten Druckwerten im Knotenpunkt i bzw. j . Im Allgemeinen kann nicht von der Einzigartigkeit einer Verbindungskante ausgegangen werden, vielmehr ist es die Regel, dass mehrere Verbindungskanten existieren. Für diesen Fall wird ein

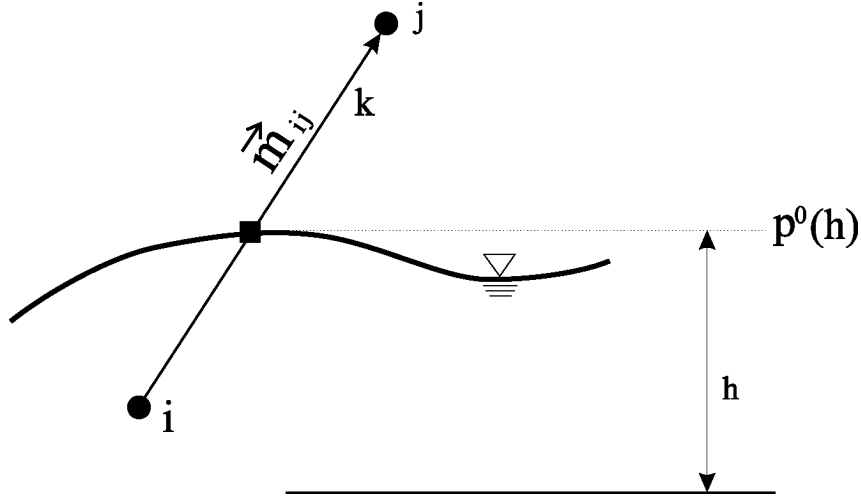


Abb. 5.5: Veranschaulichung der Bezeichnungen zur inneren Druckrandbedingung

gewichteter Mittelwert aus den Kantenprojektionen normal zur Oberfläche gebildet, so dass für den korrigierten Druckwert am Knotenpunkt i die Beziehung

$$\tilde{p}_i^{\text{corr}} = \tilde{p}_i + \frac{\sum_{K \in K_n^0} \Delta \tilde{p}_K^* (\vec{m}_{i,j(K)} \cdot \nabla \psi_i)}{\sum_{K \in K_n^0} (\vec{m}_{i,j(K)} \cdot \nabla \psi_i)} \quad (5.19)$$

angegeben wird. Hierbei sind K_i^0 die Kanten der Ebene 0 (Durchstoßungskanten) des Knotenpunkts i . Die Korrektur für die Punkte j erfolgt analog.

Diese relativ einfache innere Druckrandbedingung erfordert keine Änderungen für die Diskretisierung der Stömungsgleichungen, d.h. es kann der gleiche Löser für Problemstellungen mit und ohne Berücksichtigung der freien Oberfläche angewendet werden. Soweit die Strömungsgrößen oberhalb der freien Oberfläche ohne Bedeutung sind, werden diese Knotenpunkte ohne besondere Randbedingungen mit extrapolierten Werten der korrespondierenden Variablen besetzt.

6 Modellbildung des Propellers

Die geeignete Wahl von Propeller und Ruder, sowie deren relative Position zum Schiffsrumpf bzw. zueinander haben einen Einfluss auf den Leistungsbedarf des Schiffes. In Modellversuchen konnte gezeigt werden, dass durch Verschiebungen von Propeller und Ruder am gegebenen Rumpf eine Reduktion des Leistungsbedarfs von 3% ermöglicht werden konnte [11]. Die Optimierung stellt demnach eine für den Schiffsentwurf relevante Aufgabe dar, die bezüglich der Fragestellung für eine theoretisch/ numerische Herangehensweise prädestiniert erscheint.

Mit Hilfe von Modellversuchen ist die Wechselwirkung zwischen Schiffsrumpf und Propeller ausführlich untersucht worden. Eine zusammenfassende Übersicht hierzu findet sich in [1]. Mit potentialtheoretischen Ansätzen ist die Problematik beispielsweise in [47] und [44] erfolgreich behandelt worden.

Die numerische Simulation der viskosen Strömung um und durch einen drehenden Propeller bleibt aufgrund der Komplexität und trotz Weiterentwicklungen der numerischen Verfahren und zunehmender Rechenleistung eine große Herausforderung. Prinzipiell ist es denkbar, die exakte Propellergeometrie räumlich zu diskretisieren und die Propellerumströmung gemeinsam mit dem Schiffsrumpf zu lösen. In diesem Fall bekommt der Propeller in der Regel ein geometriekonformes Gitter, das eingebettet im Berechnungsgitter des Rumpfes mit der Propellerdrehrate rotiert. Hierbei kann das Propellergitter über abgleitende Flächen im Inertialgitter des Rumpfes rotieren. Wenn jetzt schon die Generierung eines Propellergitters einen enormen Arbeitsaufwand bedeutet, wird dieser Umstand durch die Einbindung in die umgebende Gitterstruktur von Ruder, Propellerdüsen etc. zusätzlich verschärft.

Erleichterungen bezüglich der Einbettung von Propellergittern konnten durch alternative Gitterkonzepte wie beispielsweise einer Chimera-ähnlichen Overset-Methode erzielt werden [25].

Zusätzlich muss dem instationären und turbulenten Charakter der Propellerumströmung, womöglich in Ablösegebieten, Rechnung getragen werden. Erfolgreich werden hier Varianten des $k\text{-}\omega\text{-}SST$ Turbulenzmodells (s. Kap. 3.1.2) eingesetzt [2]. Grundsätzlich ist hierbei zu beachten, dass eine entsprechende räumliche Auflösung erforderlich ist, und damit die Kombination von Schiffsrumpf- und Propellerdiskretisierungen einen nicht zu unterschätzenden Bedarf an Rechenkapazität voraussetzt.

Insgesamt betrachtet scheint momentan der erforderliche Aufwand zur detaillierten Simulation von Propeller-Strömungen Einzelfällen vorbehalten und für Entwurfszwecke schwierig einsetzbar zu sein.

6.1 Flächenkraftmodell

Ausgehend von der oben beschriebenen Problematik einer gemeinsamen Simulation der Strömung um Rumpf und Propeller bei vollständiger Komplexität, lässt sich zur Berechnung der Strömung im Hinterschiffsbereich der Propellereinfluss mit Hilfe einer zusätzlich aufgebrauchten Volumenkraft an der Position des Propellers approximieren. Dieser Ansatz wurde, soweit bekannt, von Schetz und Favin [57], [58] erstmalig veröffentlicht und von einer Reihe weiterer Autoren z. B. in [65] oder [11] erfolgreich eingesetzt. Durch die Reduktion der schwer zu erfassenden Propellerumströmung auf die vorzugebenen Propellerkräfte wird der Rechenaufwand erheblich verringert. Die im Folgenden beschriebene Methode auf unstrukturierten Gittern vermeidet die aufwändige Prozedur einer strukturgestützten Gittergenerierung bei akzeptabler Flexibilität bezüglich der Formulierung einer Kraftverteilung.

6.1.1 Verteilung der Propellerkräfte

Bei der Beschreibung der Propellerströmung mittels eines Modells, das nur die Wirkung des Propellers in Form von zusätzlich aufgeprägten Kraftanteilen realisiert, stellt sich prinzipiell die Frage nach Größe und Verlauf dieser Kräfte innerhalb des Propellereinflussbereiches. Bekannterweise ist die Kraftwirkung des Propellers abhängig von der Propellerzuströmung, die allerdings wiederum von der Propellerwirkung ihrerseits abhängt. Die Bestimmung der Kraftanteile und deren Verteilung wäre daher ein iterativer Prozess. Überwiegend wird zu diesem Zweck die Kombination mit potentialtheoretischen Berechnungsmethoden bevorzugt. Mit diesen Nachrechenprogrammen', basierend auf Traglinien- oder Tragflächenmodellen, wird die Propellerströmung in dem vorangehend bestimmten Nachstromfeld berechnet. Dieses ergibt dann eine neue Verteilung der Volumenkräfte und es beginnt eine neue Iterationsschleife (s.a. [11], [65]).

In vielen Anwendungsfällen kann für die Impulsquellen mit hinreichender Genauigkeit eine analytisch bestimmbare Verteilung über den Propellerradius angenommen werden. Die Kraftanteile sind dann im Vorfeld nur einmal bestimmt worden und es folgt kein iteratives Vorgehen. Die integrale Wirkung der in dieser Arbeit auf die Propellerkreisfläche bezogenen Kräfte in axialer bzw. tangentialer Richtung f_{bx}^* bzw. $f_{b\varphi}^*$ ergeben den Propellerschub T bzw. das Drehmoment Q (formuliert in den Polarkoordinaten r und φ):

$$T = 2\pi\rho L^2 U^2 \int_{R_h}^{R_p} f_{bx}^* r^* dr^* \quad (6.1)$$

$$Q = 2\pi\rho L^3 U^2 \int_{R_h}^{R_p} f_{b\varphi}^* r^{*2} dr^* \quad (6.2)$$

Grundlage der analytisch, empirischen Verteilungsfunktion bildet die Annahme, dass die vom Propellerradius radial veränderlichen Verteilungen der Größen f_{bx} und $f_{b\varphi}$ von der radialen Zirkulationsverteilung des leicht belasteten Propellers abhängen ([29]):

$$f_{bx}^* = A_x \tilde{r} \sqrt{1 - \tilde{r}} \quad (6.3)$$

$$f_{b\varphi}^* = A_\varphi \frac{\tilde{r} \sqrt{1 - \tilde{r}}}{(1 - Y_h) \tilde{r} + Y_h} \quad (6.4)$$

mit

$$A_x = C_T \cdot \frac{105}{16(4 + 3Y_h)(1 - Y_h)} \quad (6.5)$$

$$A_\varphi = \frac{K_Q}{J^2} \cdot \frac{105}{\pi(4 + 3Y_h)(1 - Y_h)} \quad (6.6)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{(Y - Y_h)}{(1 - Y_h)}, & Y &= \frac{r}{R_p}, & Y_h &= \frac{R_h}{R_p} \\ C_T &= \frac{2T}{\rho U^2 \pi R_p^2}, & K_Q &= \frac{Q}{\rho n^2 D_p^5}, & J &= \frac{U}{n D_p} \end{aligned}$$

Hierbei ist n die Propellerdrehrate und D_p der Propellerdurchmesser. Für obige Darstellung wurden die im schiffbaulichen Kontext gebräuchlichen Verhältnisse C_T , K_Q und J gewählt. Sind diese Werte für den Propeller bekannt, kann mit Hilfe der Beziehungen (6.5) und (6.6) die Verteilung der Größen f_{bx}^* bzw. $f_{b\varphi}^*$ bestimmt werden.

6.1.2 Realisierung auf unstrukturierten Gittern

Der Ansatzterm für das Propellermodell ist der Ausdruck f_{bj} der Impulsgleichung für inkompressible Strömungen Gl. 2.13:

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} (v_j^* v_k^* + \tilde{p}^*) = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left([1 + \nu_t^*] \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_j^*} \right) \right) + f_{bj}^* \quad (6.7)$$

Für alle diejenigen Kontrollvolumina, die der zu definierenden Propellerebene zugeordnet werden, besitzt der Term f_{bj} einen von Null verschiedenen Wert, im gesamten übrigen Bereich ist er null und hat damit keinen Einfluß auf die Strömung. Da im Allgemeinen die Knotenpunkte des Gitters nicht in der Propellerebene liegen, ist eine geeignete Verteilung der vorgeschriebenen Propellerkräfte am Ort des Propellers auf die benachbarten Knotenpunkte vorzusehen. Die einzige beim Gittergenerierungsprozess mit Hilfe einer Liniendefinition hilfreiche Bedingung ist, dass auf einer begrenzenden Kreislinie der Propellerscheibe die Knotenpunkte auf dieser Linie eingefangen werden. Im folgenden ist die Realisierungsprozedur beschrieben:

- (i) Erstellen einer Liste von Propellern, die charakterisiert werden durch
- die Position des jeweiligen Propellers (kartesische Koordinaten relativ zum Schiffsrumpf)
 - die Angabe des Normalenvektors bezogen auf die vom Propeller beschriebene Kreisfläche (im Folgenden als Propellerscheibe bezeichnet)
 - die Angabe von Propeller- und Nabendurchmesser
 - die Angabe der auf die Propellerfläche bezogenen Kraftanteile aus Propellerschub und Drehmoment
 - die Auswahl einer geeigneten Variante der radial veränderlichen Schubverteilung
- (ii) Eine Suchroutine durchläuft das Berechnungsgitter. Aus der Information von Propeller/ Nabenradius R_p bzw. R_h , Propellerposition \vec{x}_p und Normalenvektor der Propellerscheibe \vec{n}_p ergibt sich die Entscheidung, auf welcher Seite der Propellerscheibe sich die benachbarten Knotenpunkte P_i und P_j mit den Koordinaten \vec{x}_i bzw. \vec{x}_j befinden, und damit durch eine Kante verbunden sind, die die Propellerscheibe durchstößt (s. a. Abb. (6.1)).

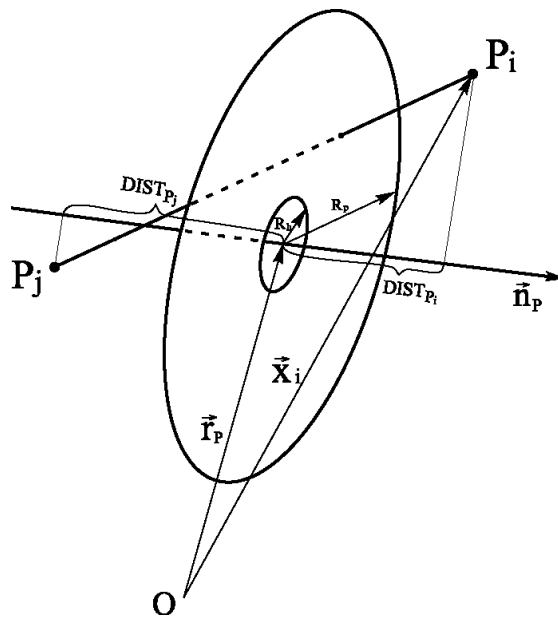


Abb. 6.1: Skizze der Propellerscheibe mit den Bezeichnungen zur Suchroutine

- (iii) Bestimmen des normalen Abstands der identifizierten Knotenpunkte zur Propellerscheibe ($DIST_{P_i}$, $DIST_{P_j}$), des Durchstoßungspunktes $\vec{x}_{d_{ij}}$ der entsprechenden Kante mit der Propellerscheibe und berechnen eines Tangentenvektors $\vec{x}_{t_{ij}}$ in der Propellerebene für die Richtung der tangentialen Kraftanteile (s. Abb. (6.2))

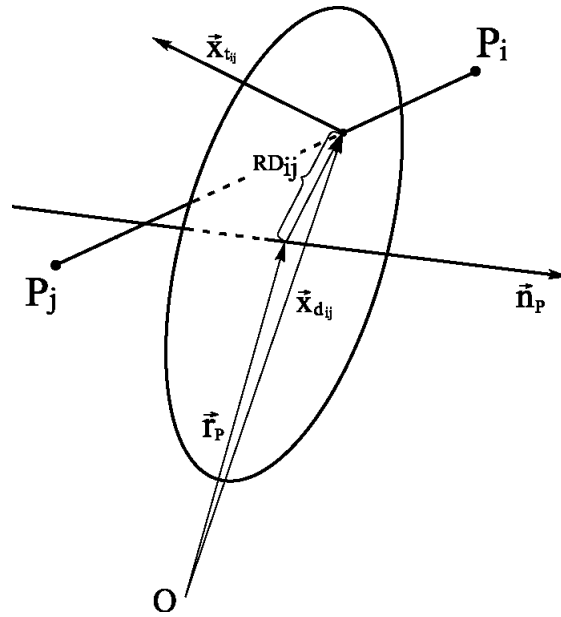


Abb. 6.2: Bestimmung des Durchstoßungspunktes und des Tangentenvektors

- (iv) Der projizierte Flächenanteil der Propellerscheibe auf die Randfläche eines Kontrollvolumens bestimmt den Anteil der in den zugehörigen Knotenpunkten abzulegenden Volumenkräfte. Die geometrischen Positionen der Knotenpunkte zur Propellerscheibe dienen als Wichtungsfaktoren für die Verteilung der Impulsquellen auf die Knotenpunkte. (s. Abb. (6.3)).

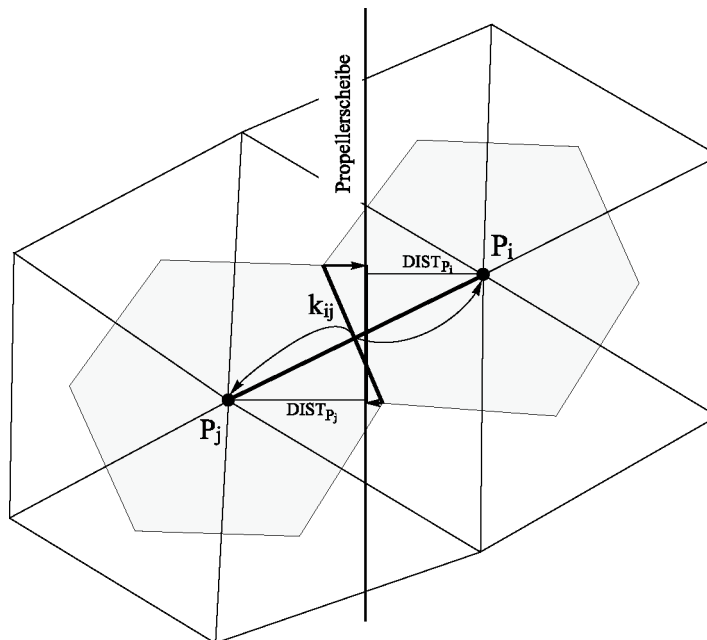


Abb. 6.3: Verteilung der Impulsquellen über Wichtung auf die Knotenpunkte

6.1.3 Beispielsimulation

Die folgenden Abb. (6.4) bzw. (6.5) zeigen ein Simulationsbeispiel der Wirkung eines fiktiven Propellermodells in einer Parallelströmung. Die dargestellten Isoflächen der axialen Geschwindigkeitskomponente resultieren allein aus der eingebrachten Impulsquelle, links ohne und rechts mit tangentialen Kraftanteilen. Die Propellerwirkung wird außerdem an der freien Oberfläche (grüne Fläche links oben) sichtbar, da die Nabenposition des Propellermodells lediglich um die Strecke des Propellerdurchmessers getaucht ist.

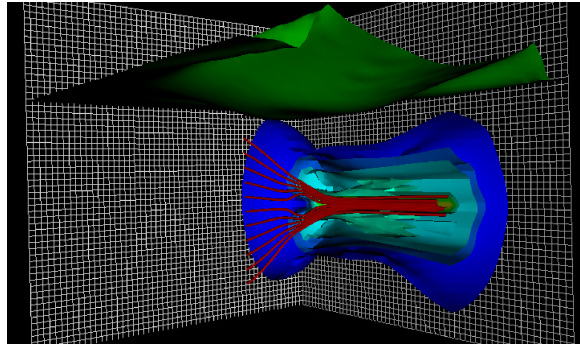


Abb. 6.4: Propellersimulation mit freier Oberfläche, Kraftscheibenmodell mit Axialkraft, Isoflächen gleicher Axialgeschwindigkeit, Stromlinien

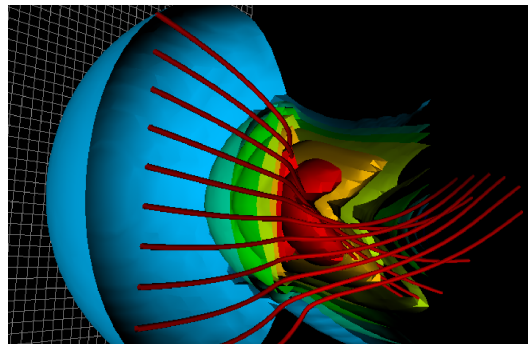


Abb. 6.5: Propellersimulation, Kraftscheibenmodell mit Axial- und Tangentialkraft, Isoflächen gleicher Axialgeschwindigkeit, ausgewählte Stromlinien

7 Gittergenerierung

Zur numerischen Lösung des Gleichungssystems (A.2) muss das kontinuierliche Strömungsgebiet durch eine endliche Anzahl von Teilgebieten approximiert werden, in denen dann die numerischen Werte der unbekannten Variablen bestimmt werden. Die diskreten Stellen werden üblicherweise in Form eines Gitters über das Lösungsgebiet verteilt (Gittergenerierung). Es gilt hierbei einerseits die Schiffsrumpfgeometrie möglichst exakt zu modellieren und andererseits ein “gutes” Gitter im Hinblick auf eine effiziente Berechnung zu erzeugen. Die Prozedur der Gittergenerierung ist meist bei praktischen Anwendungen wie der Schiffsumströmung die zeitintensivste Aufgabe und erfordert im Vorfeld einige prinzipielle Überlegungen bezüglich der Gestaltung. Eine erste wichtige Entscheidung liegt in der logischen Anordnung der Gitterzellen. Hier lassen sich generell die in der Praxis verwendeten Gitter in zwei Gruppen unterteilen:

- strukturierte Gitter
- unstrukturierte Gitter

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Lösungsroutinen zur Simulation der Schiffsumströmung basieren ursprünglich auf einer strukturierten Formulierung und sind anschließend entsprechend einiger Überlegungen für die unstrukturiert formulierte MOUSE-Bibliothek überarbeitet worden. Die gewonnene Flexibilität der unstrukturierten Gittergenerierung bei z. B. komplexen Hinterschiffsgeometrien muss allerdings durch Zugeständnisse bei der Effizienz des Lösungsalgorithmuses ‘erkauft’ werden. Im kommerziellen Umfeld hat ersteres Argument allerdings die sehr viel höhere Gewichtung. Die prinzipiell aufwändigere Parallelisierung des unstrukturierten Algorithmus konnte mit Hilfe einer verfügbaren Bibliothek gelöst werden (s. Kap. 8.1.2).

7.1 Strukturierte Gitter

Strukturierte Gitter sind durch ihre regelmäßige (abzählbare) Anordnung der Gitterpunkte charakterisiert, d.h. es gibt Richtungen im Raum, entlang derer die Anzahl der Gitterpunkte gleich ist. Damit folgen die Nachbarschaftsbeziehungen der Punkte einem festen Muster, das programmiertechnisch enorme Erleichterungen bei der Problemumsetzung bieten kann.

Der in dieser Arbeit verwendete Gittertyp ist der Schiffsgeometrie angepasst. Dies ermöglicht die einzelnen Gitterknoten (Schnittpunkte der Gitterlinien) durch ihre krummlinigen Koordinaten zu lokalisieren. Die Erhaltungsgleichungen wurden dazu

entsprechend transformiert (s. A.3). Bei der Gittergenerierung ist prinzipiell auf eine effektive Anordnung der Gitterknoten zu achten. Diese sollten dort angehäuft werden, wo sie für eine angemessene Auflösung der Strömung in den Bereichen großer Gradienten der Variablen benötigt werden. Weiterhin wird die Genauigkeit des numerischen Verfahrens zur Lösung der Erhaltungsgleichungen durch Unglattheiten des Gitters beeinträchtigt. Sehr verbreitete Methoden zur Erzeugung strukturierter Gitter bieten Techniken, die auf der Lösung von geeigneten partiellen Differentialgleichungen basieren. Bei der in dieser Arbeit verwendeten elliptischen Gittererzeugung [68] wird das Gitter über ein Differentialgleichungssystem der Form¹

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 ,\end{aligned}\tag{7.1}$$

das im Berechnungsgebiet mit vorgegebenen Gitterwerten am Rand als Randbedingungen gelöst wird, erzeugt. Hierbei wird ausgenutzt, dass das elliptische Differentialgleichungssystem das Maximum-Prinzip erfüllt, d.h. die Extremwerte werden stets auf dem Rand angenommen. Dieses sorgt dafür, dass eine monotone Vorgabe der Punkte auf dem Rand stets ein eindeutiges Gitter liefert, d.h. Überschneidungen von Gitterlinien sind dadurch automatisch ausgeschlossen.

Zur Bestimmung der Gitterkoordinaten müssen die Gleichungen (7.1) im logischen Problemgebiet gelöst werden, d.h. abhängige und unabhängige Variablen müssen vertauscht werden. Es ergeben sich auf diese Weise die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}c_1 x_{\xi\xi} - 2c_2 x_{\xi\eta} + c_3 x_{\eta\eta} &= 0 \\ c_1 y_{\xi\xi} - 2c_2 y_{\xi\eta} + c_3 y_{\eta\eta} &= 0 ,\end{aligned}\tag{7.2}$$

mit

$$c_1 = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad c_2 = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad c_3 = x_\xi^2 + y_\xi^2.$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann nach den physikalischen Gitterkoordinaten x und y gelöst werden.

Durch Hinzunahme von Quelltermen zu den Gleichungen (7.1) kann die Verdichtung von Gitterpunkten in bestimmten Bereichen des Berechnungsgebietes gesteuert werden:

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta) .\end{aligned}\tag{7.3}$$

¹Zwecks besserer Übersicht sind die Gleichungen in 2D notiert

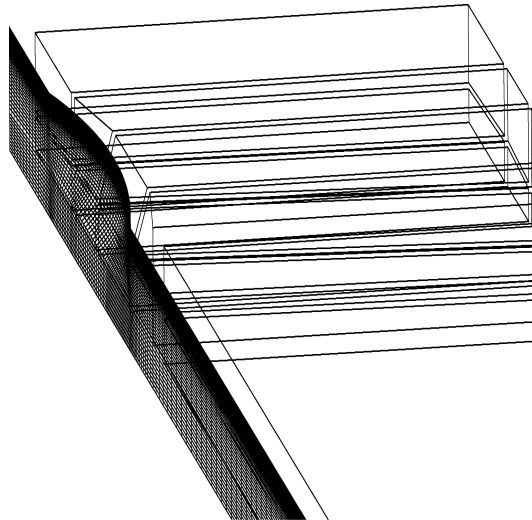


Abb. 7.1: Block Splitting für die Konfiguration im beschränkten Fahrwasser, Wigley Rumpf

Auf die (nicht triviale) Frage, wie die Funktionen P und Q konkret gewählt werden müssen, sei hier auf beispielsweise [69] verwiesen.

Für die Berechnung der Schiffsumströmung, speziell im beschränkten Fahrwasser, erhöht sich der Aufwand für die Gittergenerierung erheblich. Für diese Anwendungsfälle sind die Gitter mit dem kommerziellen Gittergenerierungsprogramm ICEM CFD/CAE Hexa erstellt worden. Hierbei wurde die relativ einfache H-Gitterstruktur beibehalten. Die Abb. (7.1) zeigt das prinzipielle Block Splitting für den Wigley-Rumpf im beschränkten Fahrwasser. Für realistische Rumpfformen in flachgehenden Strömungsgebieten, wird diese Blockstruktur ungleich komplexer.

7.2 Unstrukturierte Gitter

Bei unstrukturierten Gittern ist im Allgemeinen keine Regelmäßigkeit bezüglich der Anordnung der Gitterpunkte mehr auszumachen. Hier sind also neben den Punktkoordinaten zusätzlich die Nachbarschaftsbeziehungen zu den benachbarten Gitterzellen mit einer geeigneten Datenstruktur abzulegen (s. Kap.8). Diese ermöglicht nun eine größtmögliche Flexibilität bei der Modellierung der Problemgeometrie. Innerhalb der MOUSE-Bibliothek werden die Elementtopologien ‘Tetraeder’, ‘Hexaeder’, ‘Pyramide’ und ‘Prisma’ unterschieden. Die hier verwendeten unstrukturierten Gitter wurden mit dem ICEM CAD/CAE TETRA Modul generiert.

Unstrukturierte Gittergenerierung für turbulente Berechnungen

Aufgrund der kleinen Strukturen in turbulenten Grenzschichten ist selbst unter Anwendung des logarithmischen Wandgesetzes zur Formulierung der Randbedingungen

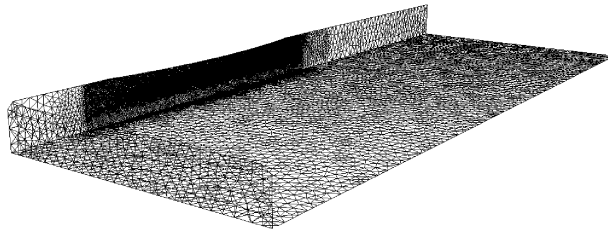


Abb. 7.2: Hybrides Gitter des Testrumpfes in der Gesamtansicht, ca. 250 000 Elemente

der turbulenten Strömungsgrößen eine deutliche Verkleinerung der räumlichen Diskretisierung in Wandnähe erforderlich. Eine entsprechende isotrope Verfeinerung auf unstruktuierten Tetraedergittern führt zwangsweise zu einer unbeherrschbaren Gitterpunktzahl, wohingegen Punktverdichtungen in Wandnormalenrichtung zu ungünstigen geometrischen Verhältnissen führen.

Daher wurde hier die Generierung hybrider Gitter, bestehend aus Prismen und Pyramiden als Kopplungselemente in unmittelbarer Wandnähe und Tetraeder im äußeren Feld, verwendet. Diese Gitter sind mit relativ einfachen Mitteln realisierbar und erfordern verglichen mit beispielsweise traditionellen Multiblockstrukturen einen wesentlich geringeren Generierungsaufwand.

Im Folgenden sind für obige Wigley-Kanalkonfiguration einige Ausschnitte aus dem hybriden Gitter dargestellt. Die Besonderheiten sind hierbei die spitzen Wasserlineineinläufe. Die Prismenschichten können in diesem Fall nicht in Form eines O-Gitters angeordnet werden, sondern ‘verlieren’ sich im Inneren des Berechnungsfeldes. Zur Realisierung der Übergänge an den Stirnflächen der Prismenschichten werden diese schrittweise aufgeweitet, so dass die Übergangselemente vom Typ ‘Pyramide’ nur akzeptable Verzerrungen erfahren.

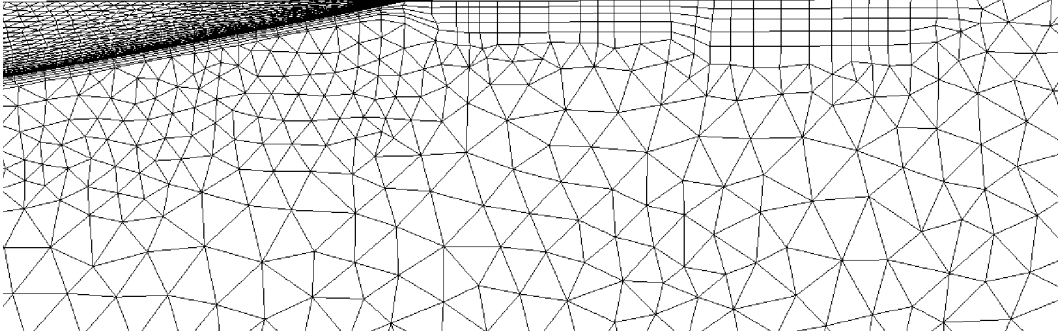


Abb. 7.3: Hybrides Gitter: Spitzer Wasserlinieneinlauf und Aufweitung der Prismenschichten

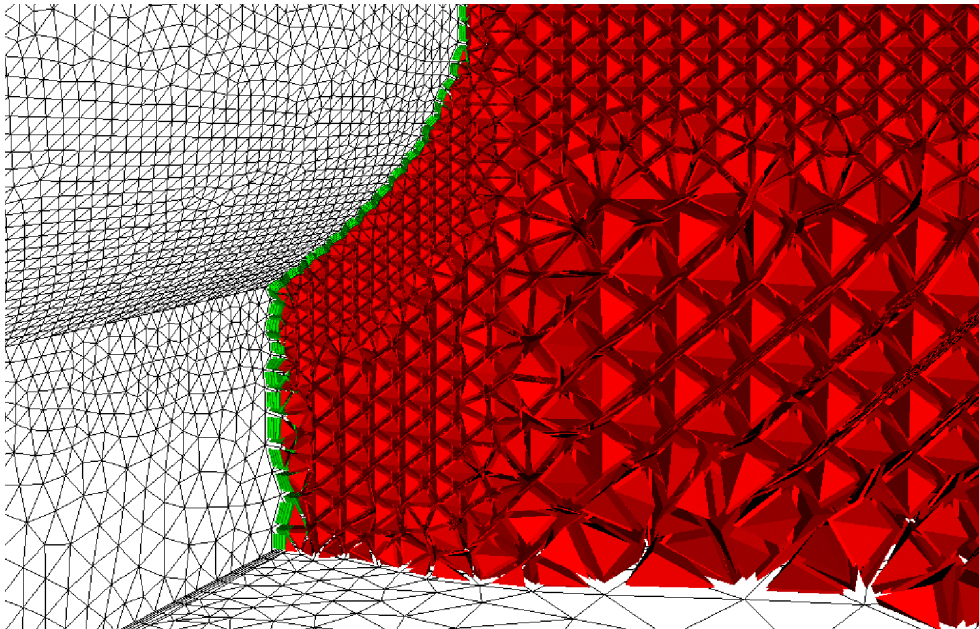


Abb. 7.4: Hybrides Gitter: Fortführung der Prismenschichten in der Symmetrieebene, grün: Prismenschichten, rot: Tetraeder

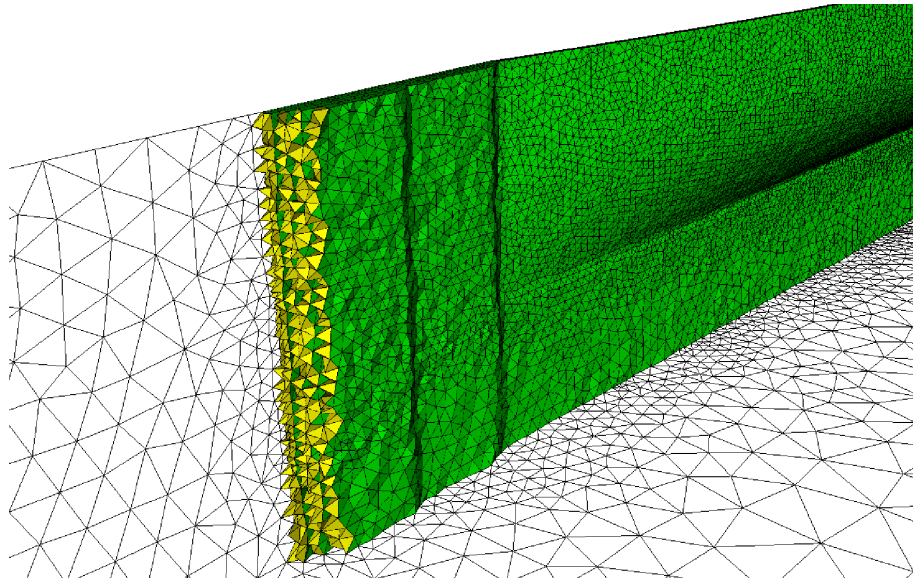


Abb. 7.5: Hybrides Gitter: Aufweitung der Prismenschichten, spitzer Wasserlinieneinlauf, grün: Prismenschichten, gelb: Pyramiden

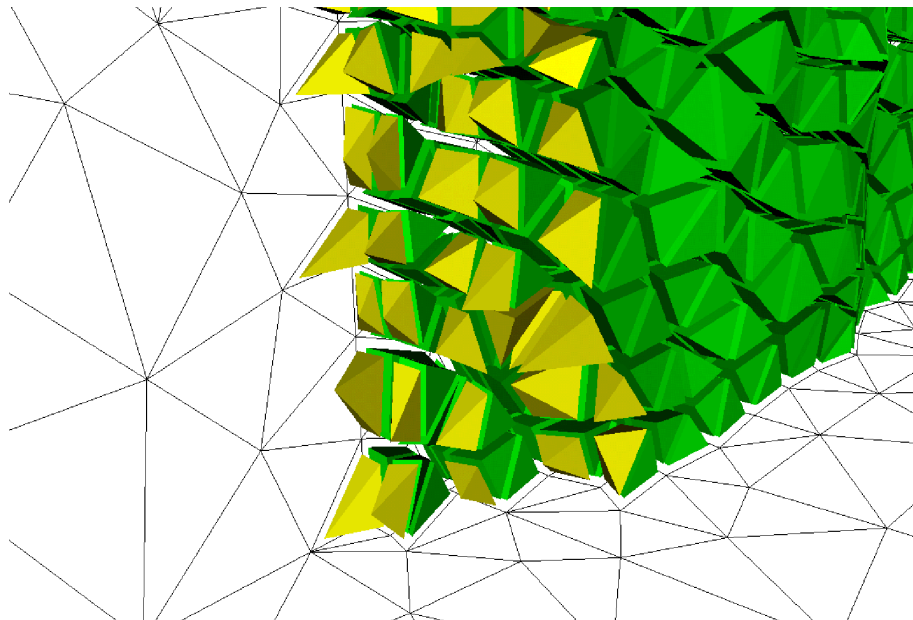


Abb. 7.6: Hybrides Gitter: Übergangselemente (Pyramiden, gelb) Prismenschicht (grün) – Tetraeder

8 Programmierplattform MOUSE

Am Institut für Verbrennung und Gasdynamik der Universität Duisburg-Essen wird seit einiger Zeit die Programmierplattform MOUSE zur Lösung der Erhaltungsgleichungen entwickelt. Motiviert durch eine Vielzahl von vorangegangenen Entwicklungen in Bereichen der numerischen Fluidodynamik ergab sich die Notwendigkeit nach einer möglichen Zusammenführung von Methoden und Erfahrungen und der Realisierung einer gemeinsamen Programmierenebene. Hierbei soll das Softwaredesign einige grundsätzliche Kriterien erfüllen:

- Verlässliche Programmierschnittstellen
- Hoher Grad an Wiederverwendbarkeit von Modulen
- Leichte Erweiterbarkeit
- Anpassungsfähigkeit an unterschiedliche Aufgabenstellungen
- Hinreichende Effizienz und Stabilität

Moderne Programmiersprachen können hilfreiche Werkzeuge, wie beispielsweise die Vererbungsstrategien der hier verwendeten Sprache *C++* (s. [66]), für die geforderte Flexibilität zur Verfügung stellen. Allerdings muss hierbei bedacht werden, dass nicht alle Kriterien miteinander harmonieren und daher ein sinnvoller Kompromiss aus Recheneffizienz und Flexibilität gesucht ist.

Die entstehende Plattform MOUSE ist eine objektorientierte Programmbibliothek auf der Grundlage eines Finite-Volumen-Verfahrens zur Diskretisierung allgemeiner Erhaltungsgleichungen auf beliebigen Gitterstrukturen. Unter Voraussetzung der oben genannten Kriterien ergibt sich ein modularer Aufbau aus einer Sammlung numerischer Methoden, physikalischer Modelle und der Datenspeicherung. Die letztendliche Anwendung wird, wie in Abb. (8.1) dargestellt, aus den hierfür spezialisierten Anteilen zusammengesetzt. Details zum Design der objektorientierten Finite-Volumen-Bibliothek MOUSE sind in [20] beschrieben.

8.1 Bemerkungen zur objektorientierten Programmierung (OOP)

8.1.1 Allgemeines

Seit Einführung der ersten Programmiersprachen sind die Programmcodes im Laufe der Zeit viel größer und komplexer geworden. Dies mag unter anderem in der zuneh-

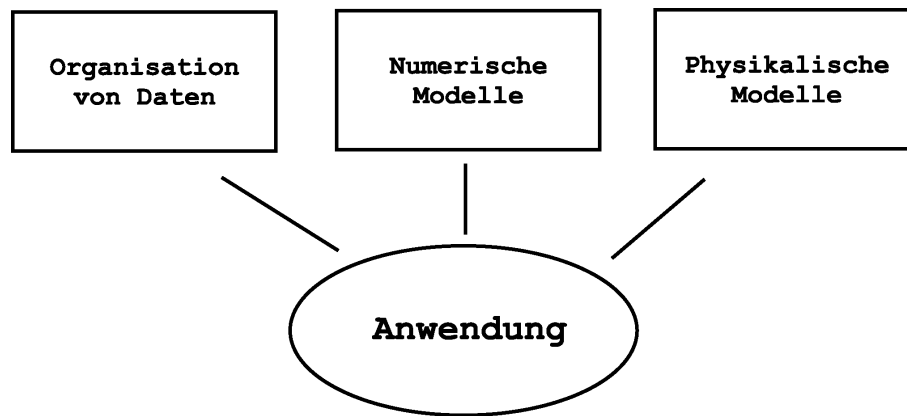


Abb. 8.1: Modularer Aufbau der MOUSE-Bibliothek

menden Leistungsfähigkeit der Hardware begründet sein. Bei Programmstücken von vielleicht 1000 Zeilen könnte die Qualität des Programmierstils noch beurteilt werden, im Falle deutlich größerer Programme geht dies nicht mehr. Wenn die Struktur beispielsweise eines 100000-Zeilen- Programmes schlecht ist, führt fast jede Fehlerbehebung zu mindestens einem neuen Fehler. Hier liefert die objektorientierte Programmierung (OOP) Hilfsmittel, um auf einem nachvollziehbaren Abstraktionsniveau die Komplexität großer Projekte zu bewältigen. Allerdings kann die Objektorientierung weder als Allheilmittel für sämtliche Probleme der Softwareentwicklung verstanden, noch sollte der objektorientierte Methodeneinsatz zum Selbstzweck werden.

Für die traditionelle Programmierung ist es charakteristisch, dass Daten und Funktionen, die diese Daten verarbeiten, keine Einheit bilden. Ausgehend von einem Algorithmus zur Lösung des Problems werden einige zentrale Datenstrukturen entworfen, auf denen dann verschiedene Funktionen Operationen ausführen. Meist sind solche zentralen Datenstrukturen global, so dass daraus eine größere Fehleranfälligkeit, z. B. durch fehlerhafte Zugriffe oder Verwendung nichtinitialisierter Daten, resultieren kann. Hinzu kommt ein hoher Wartungsaufwand, etwa wenn die Daten an neue Anforderungen angepasst werden müssen. Bei der objektorientierten Programmierung stehen die Objekte, also Dinge, um die es bei der Problemstellung geht, im Mittelpunkt. Das Objekt bildet hierbei eine Einheit aus dessen Daten und Methoden. Die entscheidenden Vorteile sind eine höhere Zuverlässigkeit, ein geringerer Wartungsaufwand und eine bessere Wiederverwendbarkeit. Im Folgenden seien einige grundlegende Merkmale der objektorientierten Programmierung zusammengefasst, was nicht als eine umfangreiche Erklärung der objektorientierten Techniken zu verstehen ist, sondern eine prinzipielle Vorstellung von der Idee der objektorientierten Programmierung liefern soll.

8.1.2 Paradigmen der OOP

Datenabstraktion Bei der objektorientierten Entwicklung werden die in der realen Welt vorkommenden Gegenstände, wie beispielsweise ein Schiff, ein Fahrrad oder ein

Mensch, als Objekte verstanden. Diese realen Objekte können dabei sicherlich ziemlich kompliziert aufgebaut sein und müssen daher notwendigerweise eine geeignete Vereinfachung erfahren: die real vorkommenden Gegenstände müssen auf wenige, in der jeweiligen Situation bedeutsamen Eigenschaften und Zusammensetzungen, die zur Erfüllung bestimmter Aufgaben zweckdienlich sind, reduziert und ggf. mit einem Oberbegriff versehen werden.

Ein Schiff sei ein Beispiel für eine in verschiedener Hinsicht durchgeführte Abstraktion:

- Das Schiff sei die Zusammenfassung verschiedener Einzelteile wie Motor, Rumpf, Propeller, Segel usw. Darüber hinaus besitze jedes Schiff Eigenschaften wie Baujahr, Designgeschwindigkeit, Länge und Breite. Auch der aktuelle Status wie z. B. der Tiefgang gehöre zu den Eigenschaften.
- Die Fähigkeit des Schiffes bestünde in erster Linie im An- und Ablegen, Be- und Entladen sowie in der Voraussfahrt.
- Das Schiff sei auch der Oberbegriff für verschiedene Schiffstypen (Massengutfrachter, Containerschiff, Passagierschiff, Segelschiff)

Sofern die Details eines Schiffes bzw. die Unterschiede zwischen verschiedenen Schiffstypen nicht interessieren, wird einfach der abstrakte Begriff *Schiff* verwendet. Objektorientierte Programmiersprachen unterstützen die Datenabstraktion, indem sie Sprachelemente zur Definition von *Klassen* zur Verfügung stellen. Klassen beschreiben die Eigenschaften von Objekten und legen mit den Methoden Operationen zur Manipulation der eigenen Daten fest. Ein konkretes Objekt wird nach dem Muster der Klasse erzeugt. Das untenstehende Beispiel (Abb.(8.2)) zeigt dies anhand des Begriffs Schiff. Immer dann, wenn im Programm ein konkretes Schiff benötigt wird, wird ein Objekt entsprechend der Klasse *Schiff* instantiiert.

Datenkapselung Ein Objekt besteht im Sinne der OOP wie oben beschrieben aus Methoden und Eigenschaften. Das Anwenderprogramm arbeitet mit den Objekten, indem es die Methoden aus der öffentlichen Schnittstelle der entsprechenden Klasse aufruft. Die interne Darstellung der Daten braucht das Anwendungsprogramm dabei nicht zu kennen. Somit erfolgt der Zugriff auf die Daten des Objektes nicht direkt, sondern in kontrollierter Weise über die Methoden. Da die Klasse auch die Erzeugung und Zerstörung eines Objektes festlegt, kann sichergestellt werden, dass

- nach dem Erzeugen eines Objektes die Daten initialisiert sind
- fehlerhafte oder unzulässige Zugriffe durch die Methoden abgefangen werden
- ein Objekt in geordneter Weise ‘zerstört’ wird

Ein Objekt verwaltet sich also mit Hilfe seiner Methoden selbst und kapselt seine Daten von der Außenwelt ab. Dadurch ist jederzeit die Integrität der Daten sichergestellt.

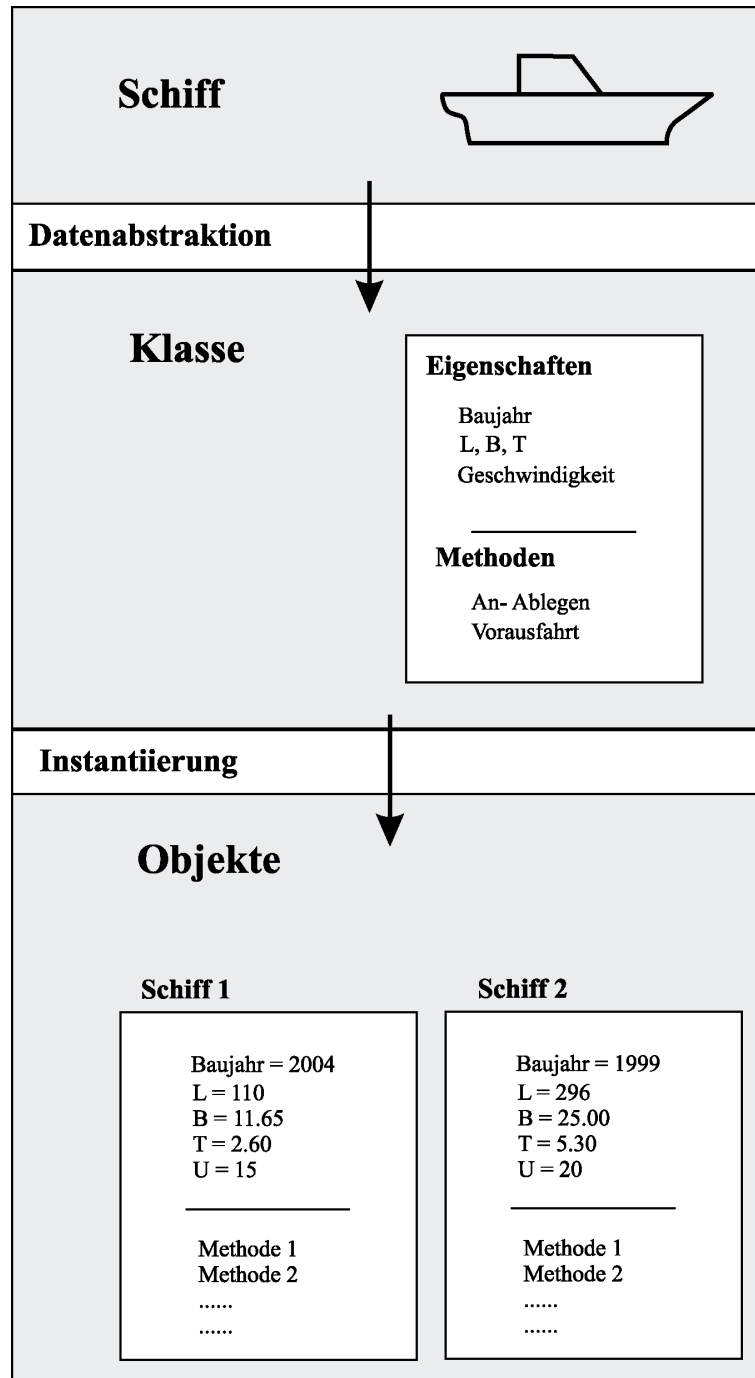


Abb. 8.2: Beispiel zur Datenabstraktion

Vererbung Die Vererbung ist ein einfacher und effizienter Mechanismus, mit dem aus bereits existierenden Klassen neue Klassen gebildet werden können. die neue, *abgeleitete* Klasse ‘erbt’ die Daten und Elementfunktionen der sogenannten *Basisklasse*. Zusätzlich kann die abgeleitete Klasse um weitere Eigenschaften und Fähigkeiten ergänzt werden. Die folgende Abb. (8.3) zeigt ein Beispiel für eine Einfachvererbung mit zwei Hierarchiestufen. Die Instanz der Klasse *Containerschiff* erbt alle Methoden und Eigenschaften der Klassen *Frachtschiff* und *Schiff*. Prinzipiell ist eine Vererbung über beliebig viele Stufen möglich, die verschiedenen Klassen bilden durch ihre Verknüpfung Klassenhierarchien. Im Falle der Einfachvererbung besitzt jede Klasse genau eine direkt beerbte Klasse.

Soll in dem angeführten Beispiel die Instanz *Fährschiff*, welche sowohl Eigenschaften der Klasse *Frachtschiff* sowie der Klasse *Passagierschiff* besitzt eingefügt werden, müssten bei einer Realisierung als Erbklassse von *Frachtschiff* die Methoden und Eigenschaften der Klasse *Passagierschiff* neu implementiert werden. Um das zu vermeiden, sollte die Programmiersprache eine Mehrfachvererbung unterstützen. Hierbei kann eine Klasse mehr als eine in der Hierarchie höherliegende Klasse beerben. Damit ist es auch möglich, voneinander unabhängige Klassenhierarchien zusammenzuführen.

Mit der Möglichkeit Klassen zu vererben ergeben sich prinzipiell die entscheidenden Vorteile:

- Eigenschaften und Vorgänge können mit Oberbegriffen versehen werden (Basis-klassen) und durch Spezialisierungen (abgeleitete Klassen) in hierarchischen Beziehungen geordnet werden. Komplexe Sachverhalte und Zusammenhänge werden dadurch einfach handhabbar (Datenabstraktion).
- Bereits erstellte und ausgetestete Klassen können weiterhin verwendet und an neue Aufgaben angepasst werden (Wiederverwendbarkeit). Dazu braucht dem Programmierer lediglich die öffentliche Schnittstelle der Basisklasse bekannt zu sein.

Es stellen sich hier natürlich unmittelbar die Fragen, wie die Eigenschaften innerhalb einer Vererbungshierarchie am sinnvollsten angeordnet sind (wurden beispielsweise die Eigenschaften in genau den Klassen angesiedelt, in denen sie entsprechend der ihr zugeschriebenen Semantik auch wirklich eine Eigenschaft der Klasse sind?) oder wurde im grundlegenden Designentwurf der Hierarchie ein geeigneter Abstraktionslevel gefunden? Je nach erreichtem Umfang der daraus entstandenen Programmbibliotheken sind die grundlegenden Entscheidungen nur mit großem Aufwand nachträglich zu ändern und müssen daher von Beginn an gut durchdacht sein. Dieses stellt daher einen nicht unerheblichen Anteil der Programmentwicklung dar.

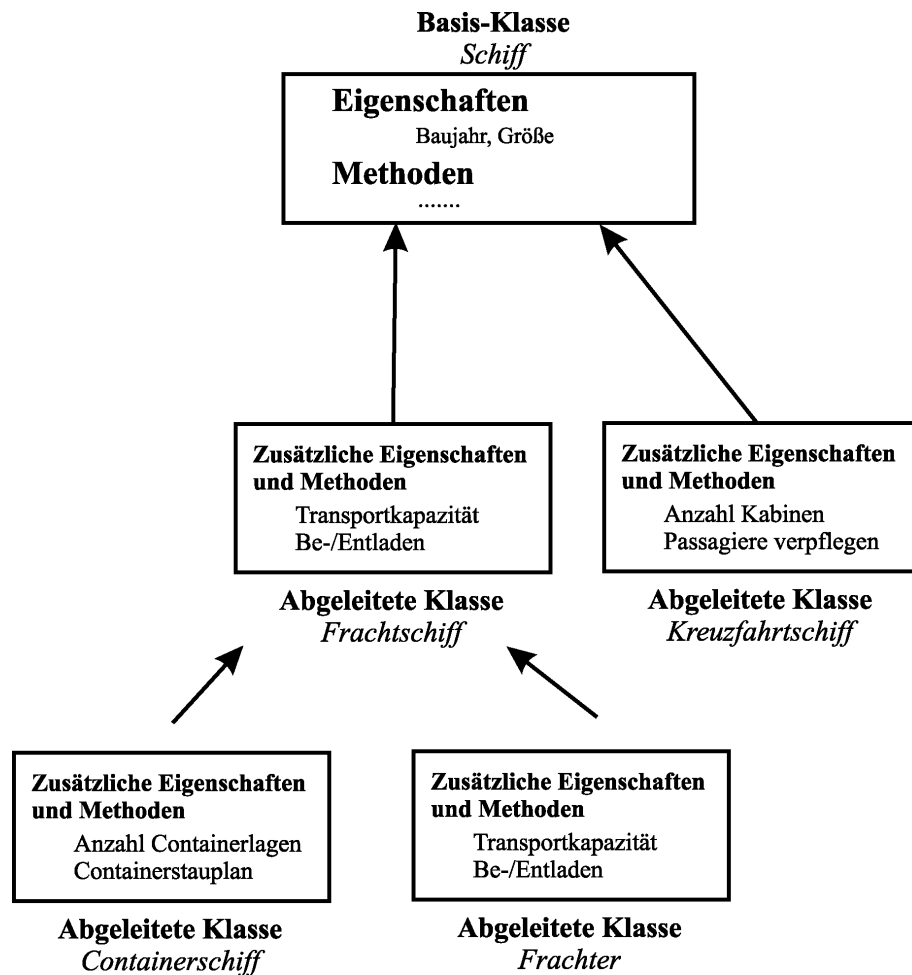


Abb. 8.3: Beispiel zur Klassenvererbung

Polymorphie In der OOP bezeichnet die Polymorphie (Vielgestaltigkeit) die Möglichkeit, dass der Aufruf einer Methode zur Programmlaufzeit verschiedene Wirkung haben kann. Eine abgeleitete Klasse verfügt zwar über Methoden ihrer Basisklasse, muss diese aber nicht unverändert übernehmen. Vielmehr ist es gängige Praxis, geerbte Operationen neu zu definieren und damit zu überschreiben. Beispielsweise ist es beim Entwurf von Klassenhierarchien sinnvoll, Basisklassen als Oberbegriffe für verschiedenartige Objekte einzusetzen, sofern es auf die speziellen Eigenschaften der Objekte zunächst noch nicht ankommt. Traditionell wurde dieses Problem gelöst, indem die Basisklasse um ein Datenelement erweitert wurde, das Informationen bezüglich des jeweiligen Objekttyps beinhaltet und mittels Abfrageroutinen die entsprechenden Methoden identifiziert wurden.

Im *C++* Kontext werden durch die Verwendung von virtuellen Elementfunktionen polymorphe Strukturen realisiert. Die Deklaration einer Funktion als virtuell bewirkt, dass Zeigern bzw. Referenzen vom Basisklassentyp, die auf ein Objekt eines abgeleiteten Typs zeigen, die Information über den Objekttyp mitgegeben wird, d. h. der Compiler veranlasst, die Aufrufe der Funktionen so zu gestalten, dass immer die zu einem Objekt gehörige Version zur Ausführung gelangt. Die Entscheidung, welches Objekt anzusprechen ist, wird erst zur Programmlaufzeit gefällt (dynamisches Binden).

Eine in der Basisklasse virtuell deklarierte Funktion definiert somit eine Schnittstelle für alle abgeleiteten Klassen, auch wenn diese zum Zeitpunkt der Festlegung der Basisklasse noch unbekannt sind. Das Programm kann damit sehr leicht um abgeleitete Klassen erweitert werden. Allerdings muss dabei bedacht werden, dass ein häufiges Aufrufen virtueller Funktionen kleinen Inhalts zu Performanceproblemen führen kann und daher das dynamische Binden durchdacht angewendet werden muss. Über eine Kombination mit statischen Bindungen (z. B. Templates) kann eine Laufzeitverbesserung erzielt werden [20].

8.2 MOUSE-Bibliothek für Schiffsumströmungen

8.2.1 Grundsätzliche Werkzeuge

Der folgende Abschnitt hat nicht die Intention einer Programmbeschreibung, vielmehr sollen an dieser Stelle einige charakteristische Merkmale der MOUSE-Bibliothek vorgestellt werden.

Prinzipiell sind bei der Bibliothek drei Zugangsebenen unterscheidbar:

Mit Hilfe graphischer Schnittstellen (GUI) kann die Anwendung interaktiv gestartet und beobachtet werden, weiterhin existiert eine interpretierte Scriptsprache (hier MCL genannt) anhand derer die Eigenschaften der Anwendung definiert werden können, die letztendlich auf der *C++*-Klassenbibliothek basiert.

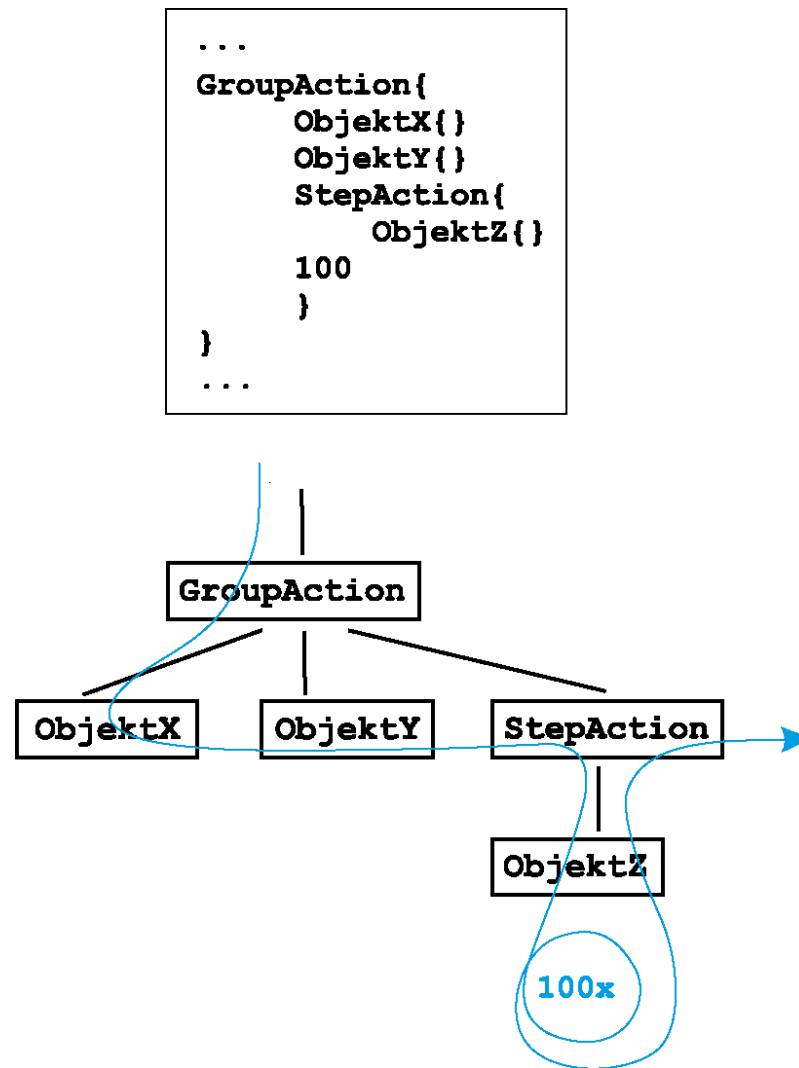


Abb. 8.4: MCL- interpretierbare Skriptsprache

Neben der GUIs ist demnach die MCL-Steuerdatei die erste wichtige Schnittstelle zwischen Benutzer und Programm. Sie wird bei jedem Programmstart durchlaufen, wobei jedes MCL-Kommando auf eine *C++*-Klasse referiert. Das entsprechende Objekt wird instantiiert und in den Klassenbaum eingebunden. Der Funktionsumfang der MCL-Skriptsprache kann relativ einfach über neue Klassen erweitert werden. Die Abb. (8.4) zeigt zur Verdeutlichung einen fiktiven MCL-Scriptabschnitt und die daraus folgende Generierung des Objektbaumes.

Den geeigneten Zugang zur objektorientierten Klassenbibliothek bilden die im vorangegangenen Abschnitt 8.1.2 erwähnten abstrakten Schnittstellen. Die wichtigsten seien hier genannt:

- Nahezu die gesamte MOUSE-Bibliothek basiert auf der Basisklasse `MObjekt`. Hier sind vor allem die grundlegende Funktionalität zum Aufbau und Orga-

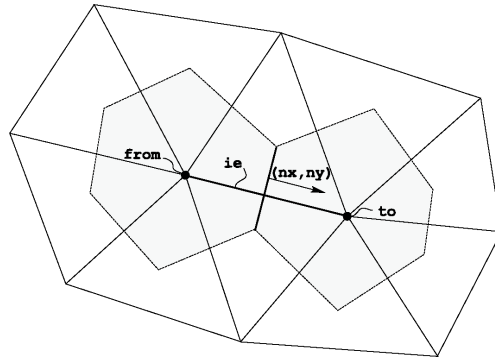


Abb. 8.5: Skizze zur Flussberechnung

nisieren des Objektbaumes definiert. Die Instantiierung von Objekten unterliegt einem speziellen Mechanismus zum Aufrufen der Konstruktoren und kann übersichtlich mit der MCL-Steuerdatei erfolgen. Weiterhin bietet `MObjekt` die notwendigen Werkzeuge zur Kommunikation der Objekte untereinander (event communication mechanism).

- Alle Kommandos der MCL-Skriptsprache sind Klassen, die von der abstrakten Klasse `Action` abgeleitet sind. Hierbei wird die Elementmethode `Act()` von den abgeleiteten Klassen überschrieben.
- Die MOUSE-Bibliothek bietet dem Programmierer die Möglichkeit Operatoren, wie beispielsweise für die kantenweise Berechnung des numerischen Flusses, reduziert auf das eigentliche Rechenmolekül, direkt zu formulieren. Die Implementierung beispielsweise für eine dreidimensionale Flussberechnung nicht durchströmter fester Wände einer inkompressiblen Strömung

`IncompressibleWFlux3D` reduziert sich damit auf die Inhalte:

```
00057 inline void IncompressibleWFlux3D::operate(size_t ie, size_t ip, size_t from, size_t to,
00058                                             size_t belem, real nx, real ny, real nz,
00059                                             bool mod_from, bool mod_to)
00060 {
00061     if (mod_from) {
00062         res_u[from] += p[from] * nx;
00063         res_v[from] += p[from] * ny;
00064         res_w[from] += p[from] * nz;
00065     };
00066     if (mod_to) {
00067         res_u[to] += p[to] * nx;
00068         res_v[to] += p[to] * ny;
00069         res_w[to] += p[to] * nz;
00070     };
00071 };
```

Mit Blick auf die Recheneffizienz wird diese Operation in Form einer statischen Bindung als Template Argument eines 'Calculators' eingesetzt. Die Schnittstelle zur MCL-Skriptsprache ist hierbei der `Point`-, bzw. `GroupPointCalculator`. In Abb. (8.6) sind die derzeit vorhandenen Kalkulatoren aufgelistet.

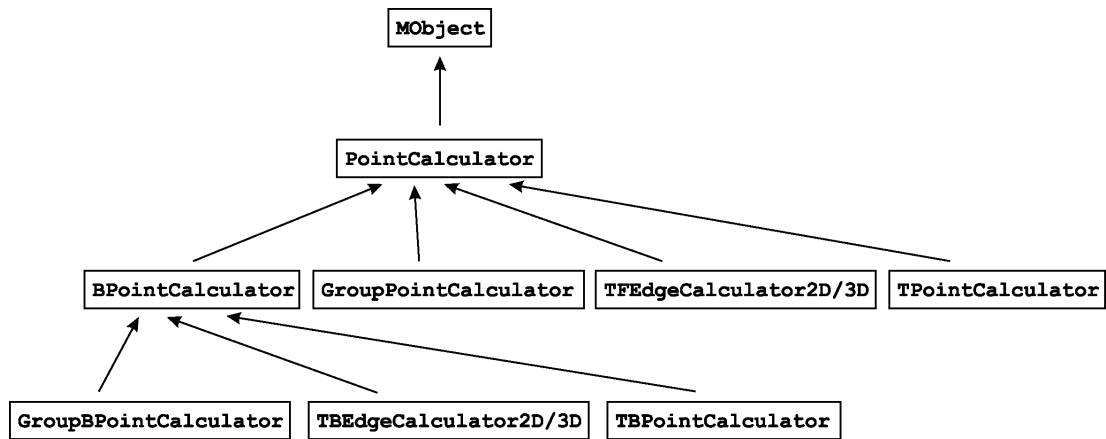


Abb. 8.6: Verwendbare Kalkulatoren

Aufgrund der unstrukturierten Formulierung des Finite-Volumen-Ansatzes innerhalb der MOUSE-Bibliothek existieren umfangreiche Methoden, um den Zugriff und das Ablegen der Daten sicherzustellen. Der Klassenbaum hierzu ist relativ komplex und soll an dieser Stelle nur als Überblick angerissen werden.

Der hauptsächliche Teil an Klassen zur Datenspeicherung/ Bereitstellung ist von der abstrakten Basisklasse **List** abgeleitet. Diese Klasse hat eine eindimensionale Struktur, deren Größe sich während der Programmlaufzeit dynamisch verändern kann und in der Lage ist, mit nicht kontinuierlichen Listen zu arbeiten. Lediglich bei der Erzeugung hat **List** eine definierte Anfangsgröße.

Darüber hinaus gibt es abgeleitete Listen mit Eigenschaften, die für besondere Zwecke zugeschnitten sind. Wichtig zu nennen ist die **PopList2D/3D** mit einer Struktur, die für jeden Knoten einer beliebigen Gittertopologie die unmittelbaren Nachbarschaftsbeziehungen beinhaltet (**P**oint to **O**ther **P**oint Struktur). Das ist beispielsweise eine Informationsvoraussetzung der kantenbasierten Operatoren für die numerische Flussberechnung.

In den Listen **PointList**, **BoundaryPointList**, **BaseElementList**, **ElementList** und **BoundaryElementList** werden gitterbasierende Inhalte abgelegt wie unter anderem die kartesischen Koordinaten eines jeden Gitterpunktes und eine Charakterisierung, ob es sich um einen Feld-, Randpunkt oder die Kontrollvolumengröße handelt. Der **VarContainer** ist als dreidimensionales Feld zum Ablegen der numerischen Größen vorgesehen. Die Ordnung der Feldeinträge gliedert sich nach der Reihenfolge

1. des numerischen Feldnamens (z. B. "old" und "new" entsprechend des alten bzw. neuen Zeitschritts)
2. des Variablennamens (z. B. "p", "u", "v", "w")
3. und eines Indexes als Verweis zur Adresse im Gitter (**PointList**)

8.2.2 Klassenbaum für künstlich kompressible Strömung

Im Folgenden soll exemplarisch am Beispiel der künstlich kompressiblen Strömung (s. Kap.2.3) gezeigt werden, wie die Klassenbaumerweiterung hierfür realisiert wurde. Im Wesentlichen handelt es sich um punkt- bzw. elementkantenorientierte Berechnungen, so dass die abstrakte `Operator`-Klasse ein geeigneter Einstiegspunkt in die Klassenhierarchie ist. Von dort aus müssen ausschließlich die Eigenschaften und Methoden ergänzt werden, die sich auf künstlich kompressible Strömungen beziehen.

Aufgrund der vielen Gemeinsamkeiten zu der rein inkompressiblen Strömung, ist die Namensvergabe einiger Klassen hinsichtlich einer geplanten zusätzlichen Erweiterung für Druckiterationsmethoden möglichst allgemeingültig gehalten. Die Abb. (8.7) zeigt einige Ausschnitte des Klassenbaums. Der Einstiegspunkt ist für alle Klassen gleich und die mindestens notwendigen Ergänzungen sind:

- Erweiterung der Variablen- und Residuenfelder um den Druck, Bereitstellung der Parameter für inkompressible Strömungen und Definition der physikalischen Dimensionen (`IncompressibleOperatorBase`)
- Erzeugung der Variablen- und Residuenfelder für die Geschwindigkeiten entsprechend der vorgebbaren räumlichen Dimension. (`IncompressibleOperator<3>`, `IncompressibleOperator3D`)
- Formulierung der Rand- und Feldflüsse. (`ArtCompressibleFFlux3D`, `ArtCompressibleRoe3D`, `ArtCompressibleBFlux3D`)
- Formulierung punktwiser Randbedingungen z. B. (`ArtCompressibleInflow3D`, `IncompressibleTWall3D`)
- Bestimmung der Zeitschrittweite (`ArtCompressibleTStep3D`)
- Initialisierung des Berechnungsgebietes (`ArtCompressibleInit3D`)
- Bereitstellung der Parameter für künstlich kompressible Strömungen (`ArtCompressibleOperator`)

Dieses Beispiel macht den offensichtlichen Vorteil der Vererbungsmöglichkeit einer objektorientierten Programmierung deutlich. Die Erweiterung des Codes für künstlich kompressible Strömungen ist auf wenige, problemspezifische Klassenergänzungen beschränkt und kann gleichzeitig Ausgangspunkt für spätere Spezialisierungen sein.

8.3 Visualisierung

Zur Darstellung der Simulationsergebnisse ist eine frei verfügbare Visualisierungsbibliothek VTK [60] in die MOUSE-Bibliothek eingebunden worden. Die VTK-Bibliothek bietet bereits eine Vielzahl an Grundfunktionalitäten und wurde an die

speziellen Belange der Ergebnisdarstellung im strömungstechnischen Kontext angepasst.

8.4 Parallelisierung

Die numerische Simulation der Schiffsumströmung erfordert in der Regel relativ große Berechnungsgitter wegen der notwendigen Anzahl von diskreten Stützstellen (s. Kap.9). In den meisten Fällen ist davon auszugehen, dass der gesamt zu adressierende Speicher auf mehrere Rechner verteilt werden muss. Selbst wenn das Problem von einem Einzelrechner adressiert werden könnte, wäre die dann erforderliche Rechenzeit inakzeptabel.

Zur Steigerung der Leistungsfähigkeit eines numerischen Verfahrens bietet sich daher die Parallelisierung an. Das Rechengebiet wird hierbei ausgehend von dem ursprünglichen gesamten Gitter in kleinere Teilgitter zerlegt. Dem derzeitigen Code ist für eine schnelle Zerlegung die frei verfügbare METIS-Bibliothek angehängt. Die Teilgitter werden den Prozessoren beispielsweise eines PC-Rechenclusters zugeordnet, die die Verantwortlichkeit für die Rechenoperationen zunächst ausschließlich auf diesem Teilgitter besitzen. In den Grenzflächen der einzelnen Rechengebiete müssen in wiederkehrenden Abständen die Variablenwerte zwischen den einzelnen Prozessoren ausgetauscht werden. Diese Aufgabe übernimmt momentan die Funktionalität der ebenfalls frei zugänglichen MPI-Bibliothek.

Aufgrund der notwendigen Kommunikation der Prozessoren untereinander und der selten vollständig symmetrischen Verteilung der Gitterzellenanzahl, wird die Rechenleistung nicht linear skaliert. Die sinnvoll zu wählende Anzahl an Prozessoren ist daher von der Gesamtzahl der Gitterzellen des Berechnungsgebietes abhängig.

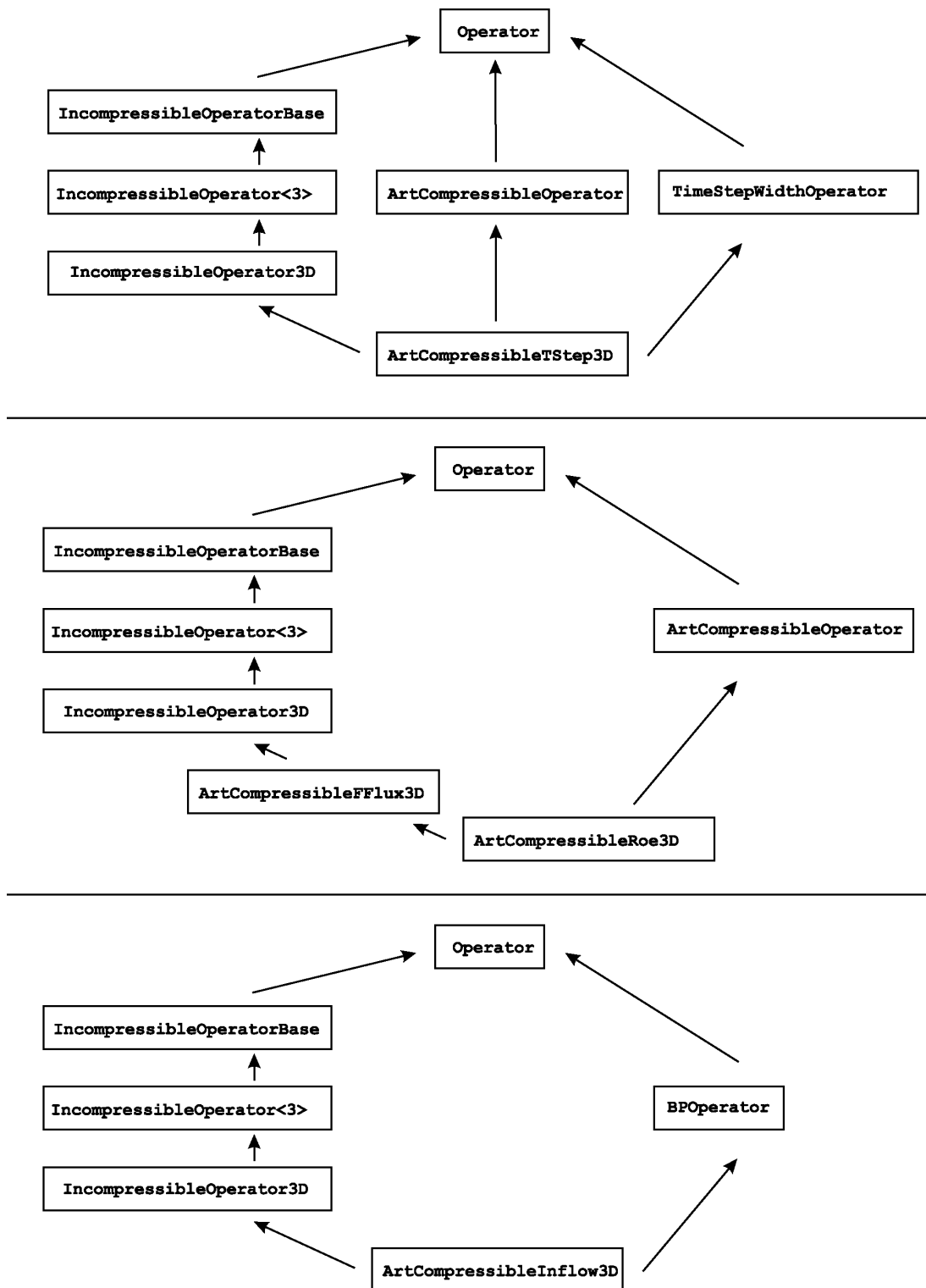


Abb. 8.7: Klassenbaumerweiterung für künstlich kompressible Strömungen

9 Anwendungen

Die Anwendung des Programms auf Schiffsumströmungen erfolgt schrittweise von einfacheren zu komplexeren Problemen. Zunächst wird ein geradeaus fahrendes Schiff ohne Berücksichtigung der Schwerkraft betrachtet. Hierbei wird die Schwimwasserlinie zu einer Symmetrieebene, was der stationären Strömung um das an der Wasserlinienebene gespiegelte, tiefgetauchte Doppelmodell entspricht. Anschließend wird die freie Wasseroberfläche für die stationäre Umströmung im unbeschränkten bzw. beschränkten Fahrwasser mit berücksichtigt. Die Berechnungen werden jeweils reibungsfrei bzw. reibungsbehaftet durchgeführt. Damit die Abhängigkeiten von der Gittergenerierung möglichst gering gehalten werden konnten, wurde die Simulation zunächst an einem geometrisch einfachen Wigley-Rumpf mit einer strukturierten, räumlichen Diskretisierung durchgeführt. Besonders für diesen Rumpf gibt es eine ganze Reihe verlässlicher Messergebnisse physikalischer Modellversuche verschiedener Schiffbauversuchsanstalten. Im zweiten Berechnungsbeispiel ist die Umströmung einer aktuellen Binnenschiffsform simuliert worden. Dieser Rumpf ist ebenfalls in einem physikalischen Modellversuch im beschränkten Fahrwasser untersucht worden. Zur Bestimmung des Druckverlaufs an der Außenhaut im Einflussbereich des Propellers während der Widerstands- und Propulsionsversuche wurde das Modell entsprechend präpariert. Die Simulationen wurden daher auf unstrukturierten Gittern mit und ohne Propellerwirkung durchgeführt.

9.1 Wahl der Berechnungsgebiete

Bei der Berechnung der Schiffsumströmung wird das Berechnungsgebiet typischerweise so groß gewählt, dass an den Außenrändern eine ungestörte Strömung angenommen werden kann. (Am Ausstromrand hinter dem Schiff ist diese Annahme wegen der nur langsam abklingenden Nachlaufströmung und Wellen nicht ganz unproblematisch, da der Zustand der ungestörten Strömung am künstlichen Rand nur aufgrund der numerischen Dämpfung erreicht wird.).

Solange die Schiffsgeometrie symmetrisch ist, wird die Schiffslängsebene als Symmetrieebene genutzt und üblicherweise die linke Rumpfhälfte modelliert. Die Schiffsaußenhaut wird entsprechend der zu erwartenden Verformung der freien Wasseroberfläche über die Schwimwasserlinie hinaus diskretisiert. Das gesamte Berechnungsgebiet erstreckt sich in den überwiegenden Fällen in Hauptströmungsrichtung von einer halben Schiffslänge ($L = L_{pp}$) vor dem Schiff bis $1\frac{1}{2}$ Schiffslängen hinter das Schiff.

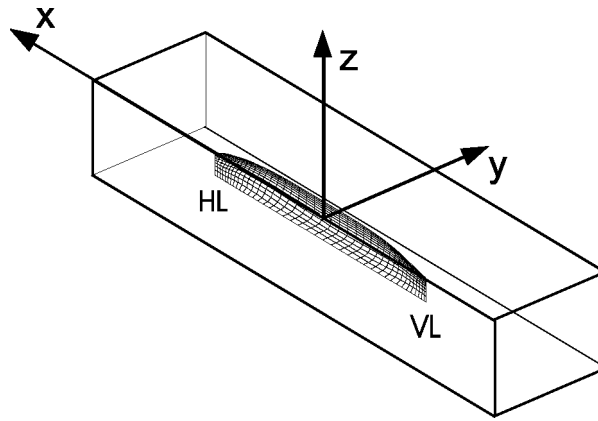


Abb. 9.1: Koordinatensystem und Schiffskonfiguration, linke Rumpfhälfte

In Quer- und Tiefenrichtung ist der Außenrand eine Schiffslänge von der Mittellängsebene bzw. von der Schwimmwasserlinie entfernt. Für die Berechnungsfälle im beschränkten Fahrwasser wurde als Konfiguration die Schlepptankgeometrie des Entwicklungszentrums für Schiffstechnik und Transportsysteme (DST) in Duisburg gewählt.

9.2 Strömungssimulationen für den Wigley-Rumpf

Als schiffbauliche Anwendung des Programms wurde die Strömung um den Wigley-Rumpf berechnet, da u.a. für diese Form eine große Anzahl Modellversuchsergebnisse verschiedener Einrichtungen existieren, die auf der 17th ITTC systematisch dokumentiert wurden [40]. Für die im Folgenden zitierten Versuchseinrichtungen wurden die folgenden Abkürzungen beibehalten:

Bulgarian Ship Hydro. Centre	BSHC
Ship Research Institute	SRI
University of Tokyo	Tokyo

Tab. 9.1: Abkürzungen der Versuchseinrichtungen

Die Oberfläche dieses Rumpfes lässt sich im Koordinatensystem entsprechend Abb. (9.1) beschreiben durch:

$$\frac{y}{2B} = \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{z}{T}\right)^2\right]$$

$$\frac{L}{B} = 10, \quad \frac{L}{T} = 16, \quad c_b = 0.44$$

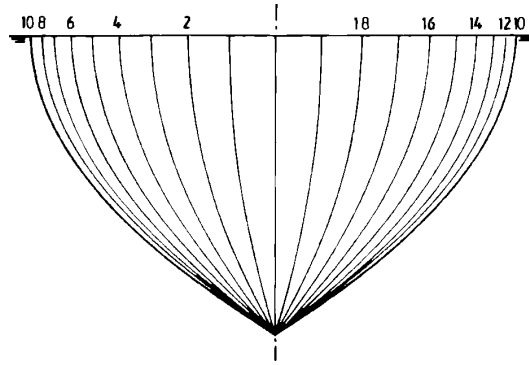


Abb. 9.2: Spantenriss des Wigley-Rumpfes

Sowohl die Spanten, als auch die Wasserlinien haben parabolische Form und die Stevenkonturen sind identisch vertikal an Vor- und Hinterschiff, wie in Abb. (9.2) gezeigt.

Entsprechend der oben genannten Wahl des Berechnungsgebietes zeigt die Abb. (9.3) einen Ausschnitt aus dem Berechnungsgitter für die reibungsfreie Doppelmodellumströmung. Die Knotenanzahl in x, y, z -Richtung beträgt $88 \times 32 \times 34$. Während der Berechnungen bleibt das Gitter unverändert, was einem Schleppversuch mit festgehaltenem Modell entspricht.

Reibungsfreie Umströmung ohne freie Oberfläche

Das tiefgetauchte Doppelmodell in einem unbeschränkten Fahrwasser, parallel mit gegebener Geschwindigkeit U angeströmt, stellt den einfachsten Widerstandsfall dar. Ohne freie Wasseroberfläche ist kein Wellenwiderstandsanteil und bei zusätzlich angenommener Reibungsfreiheit kein Reibungs- bzw. Wirbelwiderstandsanteil zu erwarten. Die Abb. (9.4) zeigt das Konvergenzverhalten für den Druckwiderstandsbeiwert, aufgetragen über die expliziten Berechnungszeitschritte. Das hier nicht vollständige Verschwinden des Druckwiderstandes ist auf Diskretisierungs- und Rechenungenauigkeit zurückzuführen. Die dazugehörige dynamische Druckverteilung auf Höhe der Symmetrieebene des Doppelmodells ist in Abb. (9.5) dargestellt. Die erkennbare Unsymmetrie ist durch die künstliche Berandung erklärbar.

Reibungsfreie Umströmung mit Berücksichtigung der freien Oberfläche

Unter der Beibehaltung der Reibungsfreiheit wird nun die freie Wasseroberfläche mittels der Level-Set Funktion beschrieben. Hierbei erstreckt sich das Berechnungsgebiet entsprechend oberhalb der Schwimmwasserlinie. Als dynamische Randbedingung wird ein konstanter atmosphärischer Druck angenommen. Die Abb. (9.6) zeigt für die

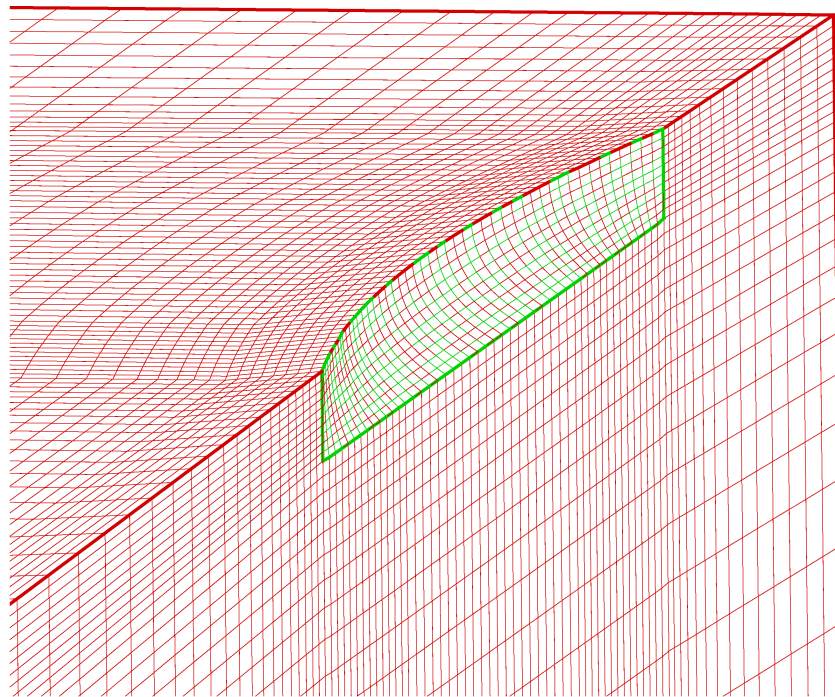


Abb. 9.3: Berechnungsgitter Doppelmodell, Wigley-Rumpf

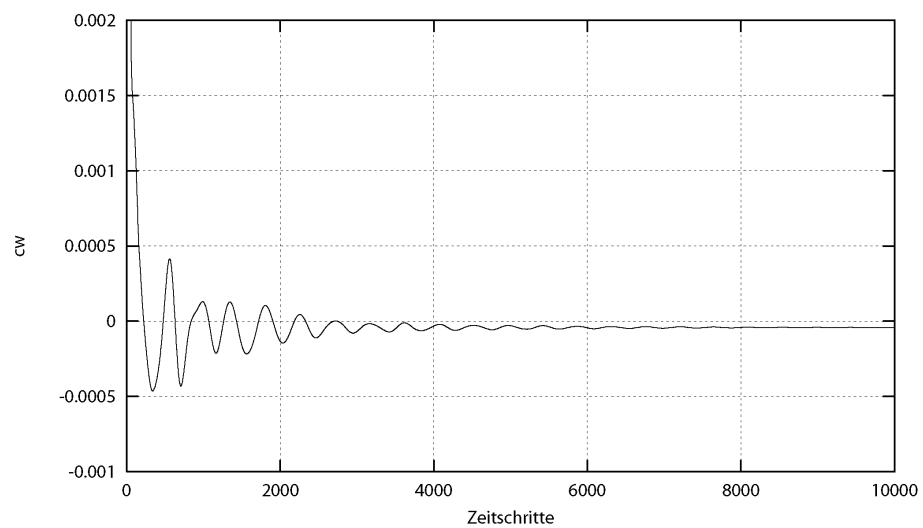


Abb. 9.4: Berechneter Druckwiderstandskoeffizient, Doppelmodell

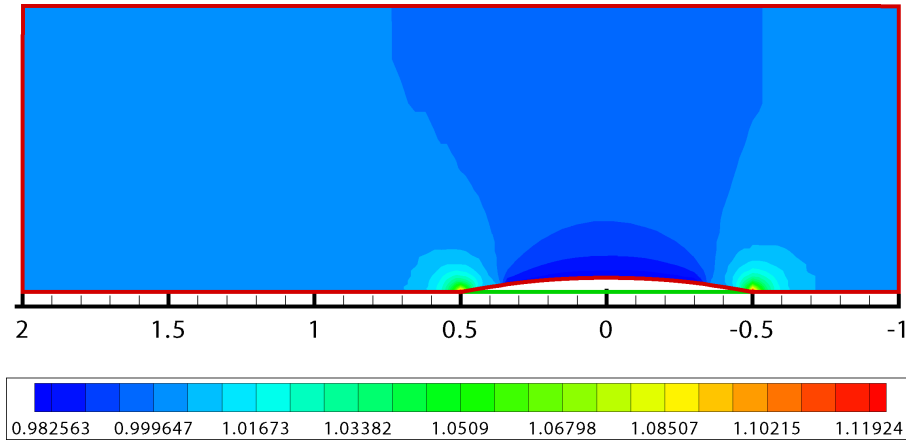


Abb. 9.5: Berechnete dynamische Druckverteilung p an der Schwimmwasserlinie, Zuströmung von rechts

Froude-Zahl $F_r = 0.25$ die sich gegenüber dem tiefgetauchten Doppelmodell verändert eingestellte dynamische Druckverteilung in der Nähe des Rumpfes an der freien Oberfläche. Für diese Froude-Zahl ist das Wellenprofil entlang der Rumpfoberfläche mit Messungen in Abb. (9.7) verglichen worden. Dargestellt ist die Wellenerhebung ζ in Abhängigkeit von der Längskoordinate x . Hierbei ist ζ die mit $U^2/2g$ dimensionslos gemachte Wellenerhebung relativ zur ungestörten Wasseroberfläche.

Die anschließende Integration aller in Fahrtrichtung liegenden Druckanteile über die benetzte Rumpfoberfläche ergibt den resultierenden Wellenwiderstand.

Für diese Konfiguration sind eine Reihe von Berechnungen in einem Froude-Zahl Bereich von 0.1-0.5 durchgeführt worden. Die Abb. (9.8) zeigt den Vergleich mit den Messungen der verschiedenen Versuchseinrichtungen. Sowohl die Gesamtwiderstandsbeiwerte als auch die Wellenwiderstandsbeiwerte aus den unterschiedlichen Messungen zeigen untereinander eine gute Übereinstimmung und können zur Überprüfung der berechneten Werte herangezogen werden. Die Wellenwiderstandsbeiwerte zeigen hierbei eine gute Übereinstimmung. Die Widerstandswerte sind jeweils mit $\frac{1}{2}\rho U^2 S$ dimensionslos gemacht worden. Hierbei ist S die gesamte benetzte Fläche unterhalb der Wasserlinie.

Von großem Interesse für die Binnenschifffahrt ist die Berücksichtigung des beschränkten Fahrwassers auf die Druckverteilung am Rumpf und damit letztendlich auf die Widerstandsanteile und die Wellenbildung. Solange sich das Schiff im deutlich unterkritischen Geschwindigkeitsbereich befindet ($Fr_h < 0.8$), kann eine Simulation mit den veränderten Randbedingungen an den festen Wänden durchgeführt werden. Allerdings ergeben sich bei der derzeitigen Gitterstruktur Schwierigkeiten durch verzerrte Volumenelemente im Falle völliger Binnenschiffe.

Im Folgenden sind für den Wigley-Rumpf die Berechnungen im beschränkten Fahrwasser für einen Bereich der Froude-Zahl von 0.1-0.35 bei einem Wassertiefen-Tiefgangs-

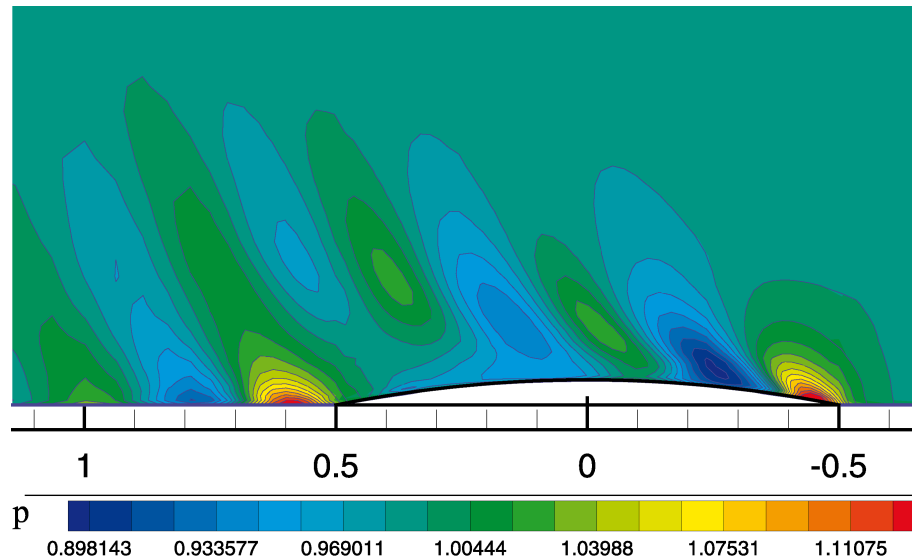


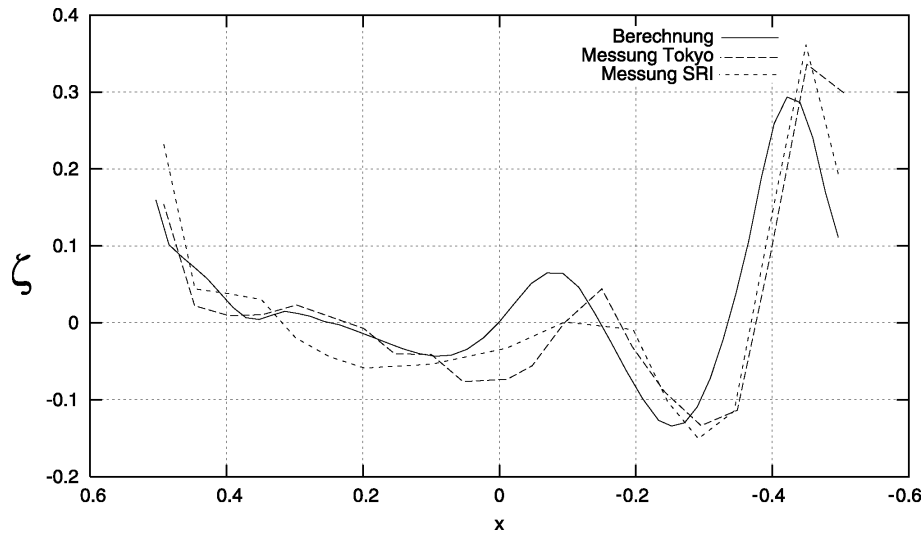
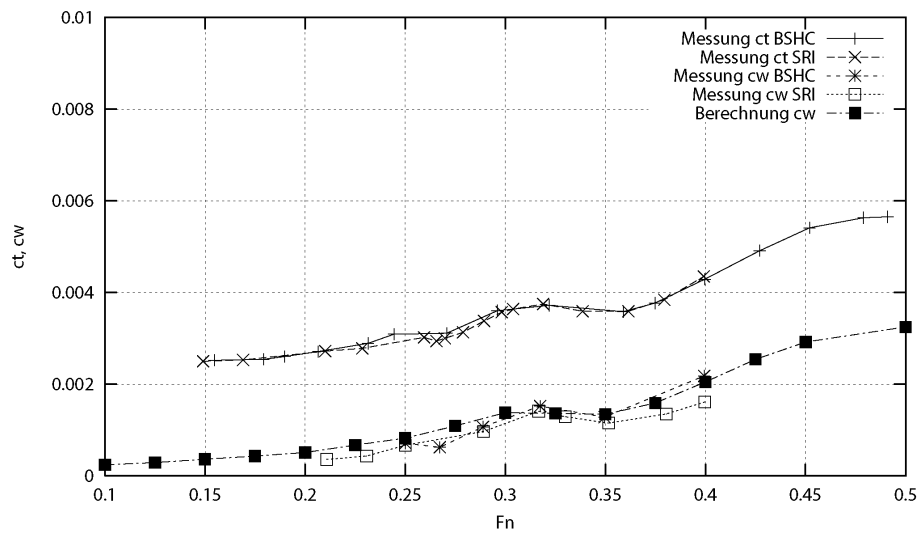
Abb. 9.6: Berechnete dynamische Druckverteilung p an der freien Oberfläche, $Fr = 0.25$, Zuströmung von rechts

verhältnis von $h/T=2.0$ durchgeführt worden. Die Abb. (9.9) und (9.10) zeigen die veränderte Druckverteilung auf der freien Oberfläche bzw. das berechnete Wellenprofil entlang des Rumpfes verglichen mit den Ergebnissen aus der Tiefwasserberechnung. Den berechneten Wellenwiderstandskoeffizienten im beschränkten Fahrwasser sind die Messungen und Berechnungen für tiefes Wasser in Abb. (9.11) gegenübergestellt. Die Abb. (9.12) zeigt, wie unterschiedlich sich für den Wellenwiderstand die stationären Beiwerte während des Rechnlaufs einstellen.

Reibungsbehaftete Umströmung ohne freie Oberfläche

Für die reibungsbehaftete turbulente Schiffsumströmung wird zunächst wie bei der reibungsfreien Umströmung das parallel angeströmte, tiefgetauchte Doppelmodell betrachtet. Da zum einen die Berechnung der turbulenten Schiffsumströmung mit zunehmender Reynoldszahl komplizierter wird (je größer die Reynoldszahl, desto feiner ist die geforderte Gitterauflösung in Wandnähe) und zum anderen ein Vergleich mit den Messergebnissen nur im Modellmaßstab möglich ist, werden die reibungsbehafteten Berechnungen mit der Reynoldszahl $Re = 5.53 \cdot 10^6$ durchgeführt.

Die reibungsbehaftete Umströmung bedingt die Ausbildung einer turbulenten Grenzschicht, deren Geschwindigkeitsprofil bei dem hier verwendeten $k-\varepsilon$ -Modell für hohe Reynolds-Zahlen durch Wandfunktionen angenähert wird. Die damit gegenüber der reibungsfreien Umströmung veränderte Druckverteilung ergibt nach Integration über die benetzte Rumpfoberfläche den viskosen Druckwiderstand. Der Reibungswiderstand ergibt sich aus den Anteilen der berechneten Schubspannung. In Abb. (9.13) sind für beide Widerstandsanteile die Berechnungsverläufe in Abhängigkeit der Zeitschritte


 Abb. 9.7: Berechnete Wellenerhebung, $Fr = 0.25$, Bug bei $x = -0.5$, Heck bei $x = 0.5$

 Abb. 9.8: Berechnete Wellenwiderstandsbeiwerte C_W im Vergleich zu Messungen verschiedener Versuchsanstalten

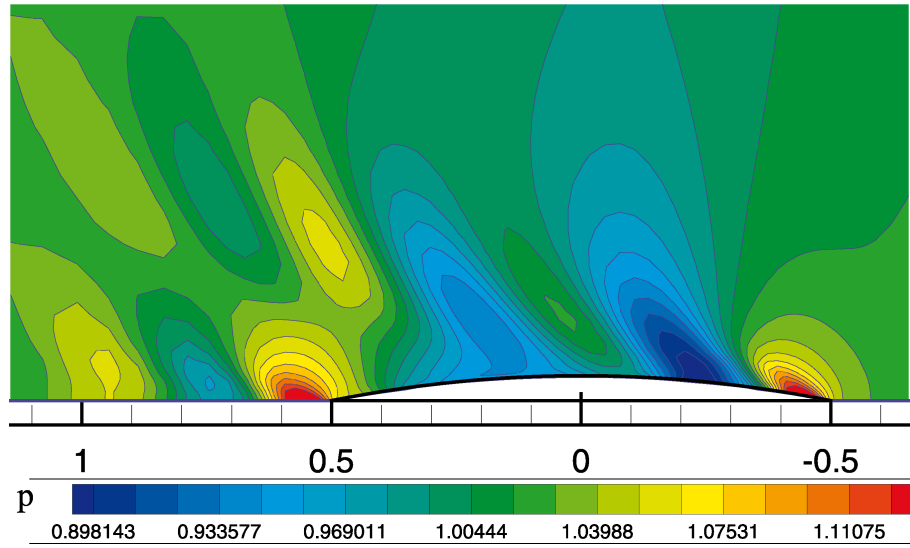


Abb. 9.9: Berechnete dynamische Druckverteilung an der freien Oberfläche, beschränktes Fahrwasser $Fr = 0.25$, $h/T = 2.0$, Zuströmung von rechts

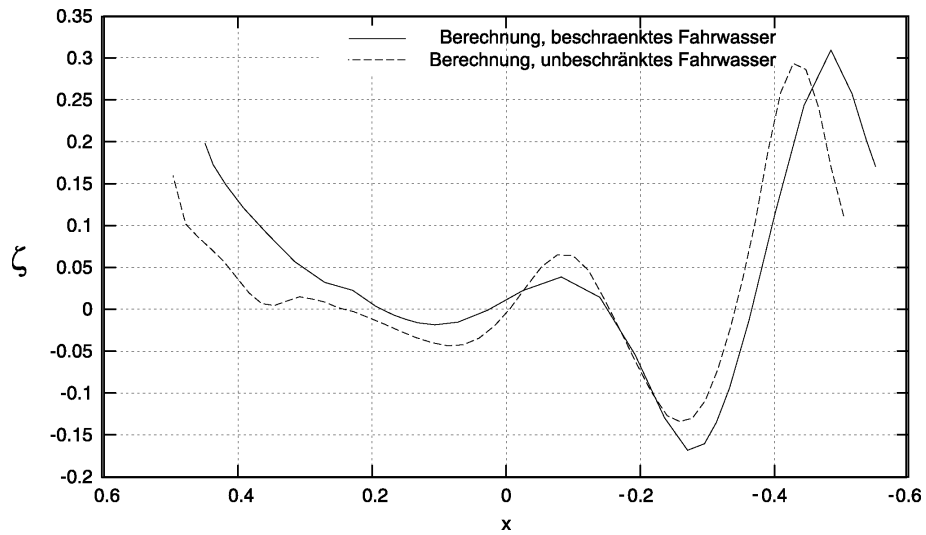


Abb. 9.10: Berechnete Wellenerhebung für beschränktes Fahrwasser, $Fr = 0.25$, $h/T = 2.0$, Bug bei $x = -0.5$, Heck bei $x = 0.5$ im Vergleich zum unbeschränkten Fahrwasser.

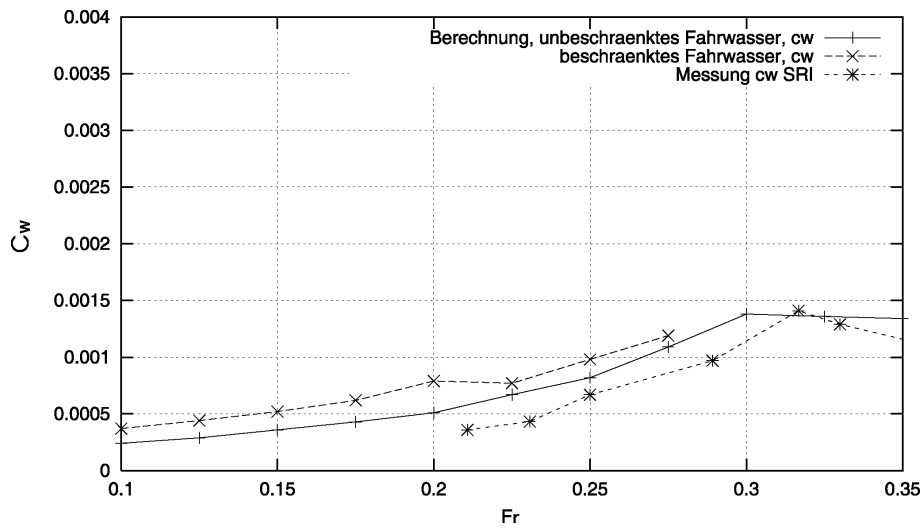


Abb. 9.11: Berechnete Wellenwiderstandsbeiwerte C_W , beschränktes Fahrwasser, $h/T = 2.0$, Vergleich mit Messungen verschiedener Versuchsanstalten

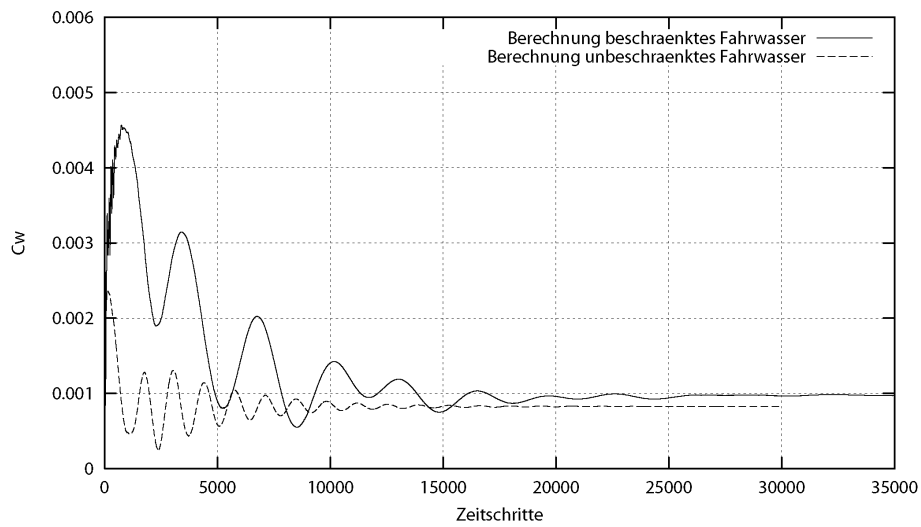


Abb. 9.12: Konvergenzverhalten für die berechneten Wellenwiderstandsbeiwerte C_W im beschränkten bzw. unbeschränkten Fahrwasser

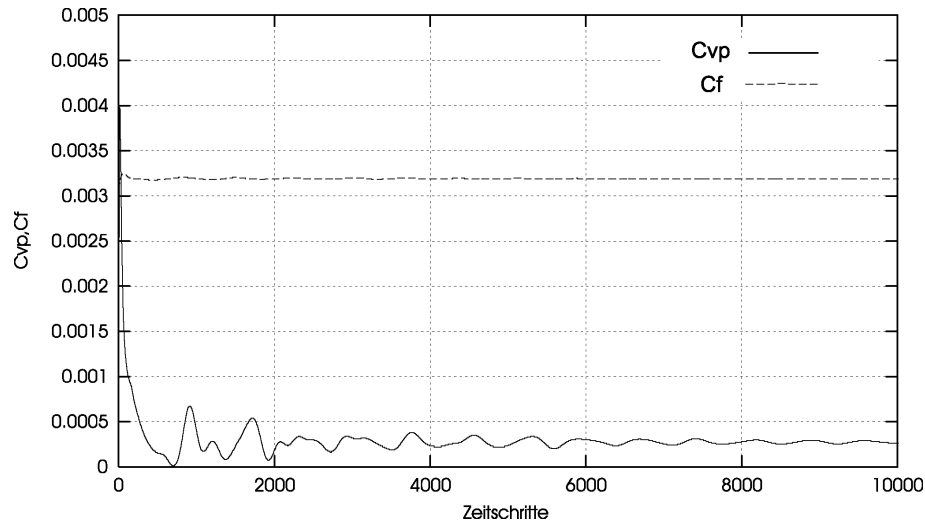


Abb. 9.13: Konvergenzverhalten des berechneten viskosen Druckwiderstandsbeiwerts C_{VP} und Reibungsbeiwerts C_F eines Doppelmodells bei turbulenter Strömung, $Re = 5.53 \cdot 10^6$

aufgetragen. Der berechnete Reibungswiderstandsbeiwert ist in vergleichbarer Größenordnung mit der ITTC-Korrelationslinie von 1957 $C_{F, ITTC} = \frac{0.075}{(\log Re - 2)^2}$:

	$C_{F, ITTC}$	berechnet C_F	berechnet $C_{VP} + C_F$
1000 C	3.334	3.112	3.472

Tab. 9.2: ITTC-Korrelationsbeiwert im Vergleich mit dem berechneten Beiwerten

Anstelle einer Druckverteilung ist in Abb. (9.14) als anschauliche turbulente Kenngröße die spezifische kinetische Energie der Turbulenz $k = \frac{1}{2} \overline{v'_j v'_j}$ dargestellt.

Reibungsbehaftete Umströmung mit freier Oberfläche

Für die folgenden Berechnungen wird wie im Kap. 5.3.2 die freie Wasseroberfläche hinzugefügt ($Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$). Die Integration der Druck- und Schubspannungskomponenten ergeben den Druck- bzw. Reibungswiderstand. In Abb. (9.15) ist die Konvergenzgeschichte für die jeweiligen Widerstandsbeiwerte dargestellt. Die zugehörigen numerischen Werte sind in untenstehender Tabelle den Messungen gegenübergestellt.

Die Abb. (9.16–9.18) zeigen die berechnete dynamische Druckverteilung im unbeschränkten bzw. beschränkten Fahrwasser mit den entsprechenden Wellenprofilen entlang der Rumpfoberfläche.

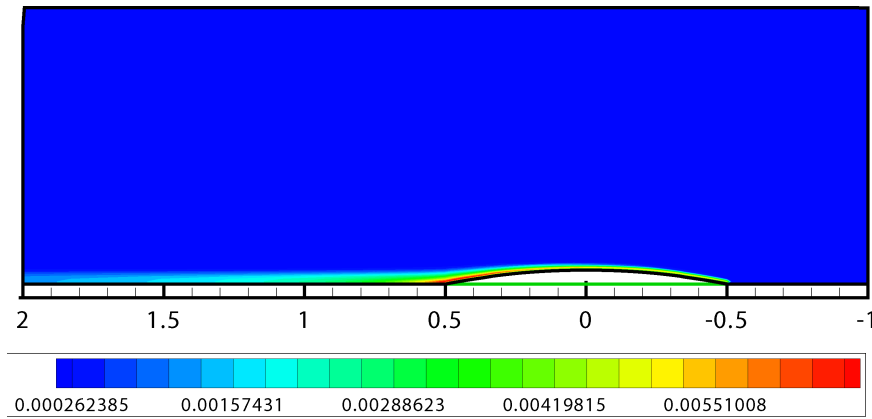


Abb. 9.14: Konturdarstellung berechneter spezifischer turbulenter kinetischer Energie ε , Doppelmodell, $Re = 5.53 \cdot 10^6$, Zuströmung von rechts

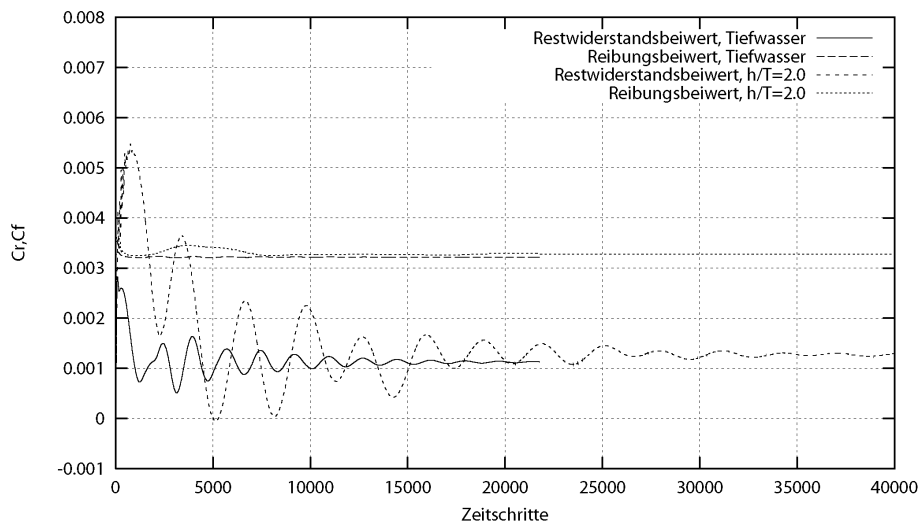


Abb. 9.15: Konvergenzverhalten des berechneten Druckwiderstandsbeiwerts C_P und Reibungsbeiwerts C_F , $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$

	BSHC	SRI	ber. Tiefwasser	ber. h/T=2.0
1000 C_W	0.711	0.668	-	-
1000 C_P	-	-	1.131	1.291
1000 C_F	-	-	3.219	3.28
1000 C_T	4.212	4.169	4.35	4.571

Tab. 9.3: Messwerte aus den Modellversuchen den Berechnungen gegenübergestellt

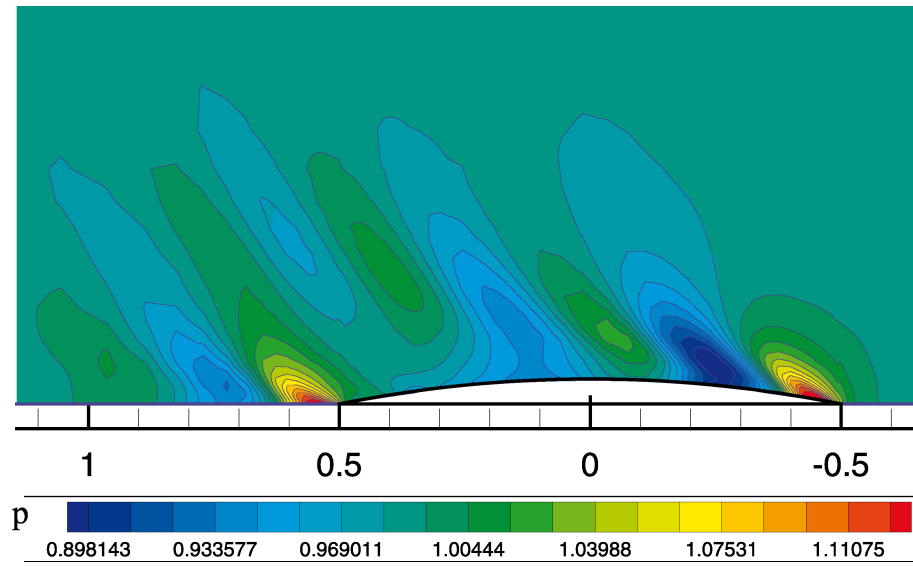


Abb. 9.16: Berechnete dynamische Druckverteilung p , Tiefwasser, $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$, Zuströmung von rechts

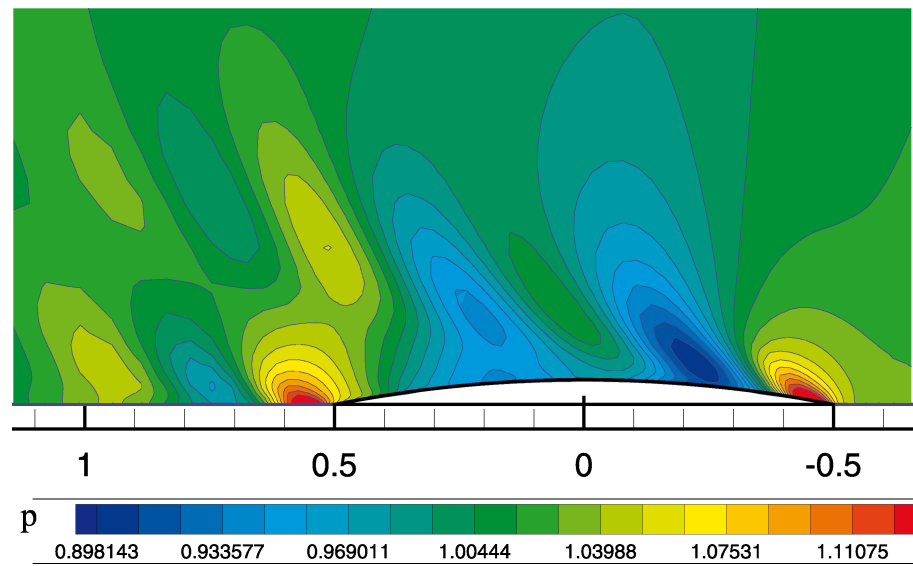


Abb. 9.17: Berechnete dynamische Druckverteilung p , beschränktes Fahrwasser, $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$, Zuströmung von rechts

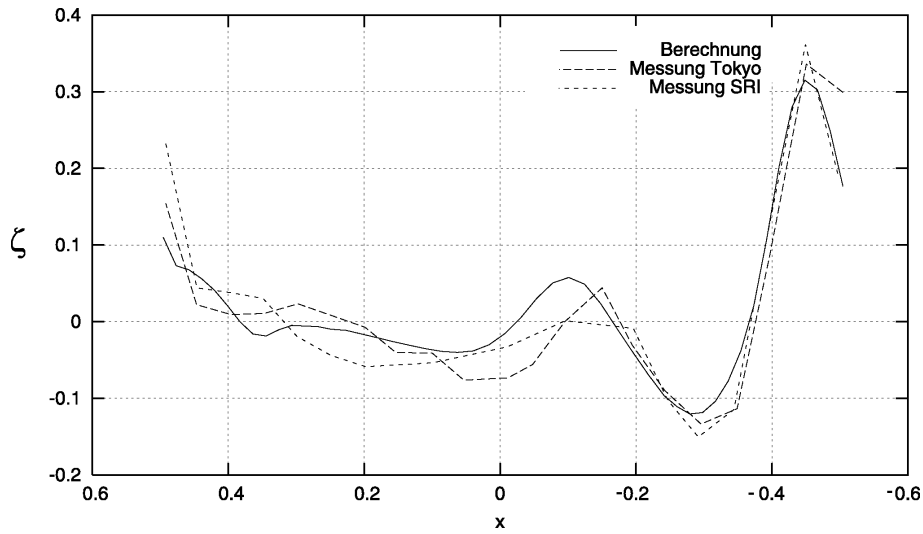


Abb. 9.18: Berechnete Wellenerhebung im Vergleich zu verschiedenen Messungen im unbeschränkten Fahrwasser, $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$, Bug bei $x = -0.5$, Heck bei $x = 0.5$

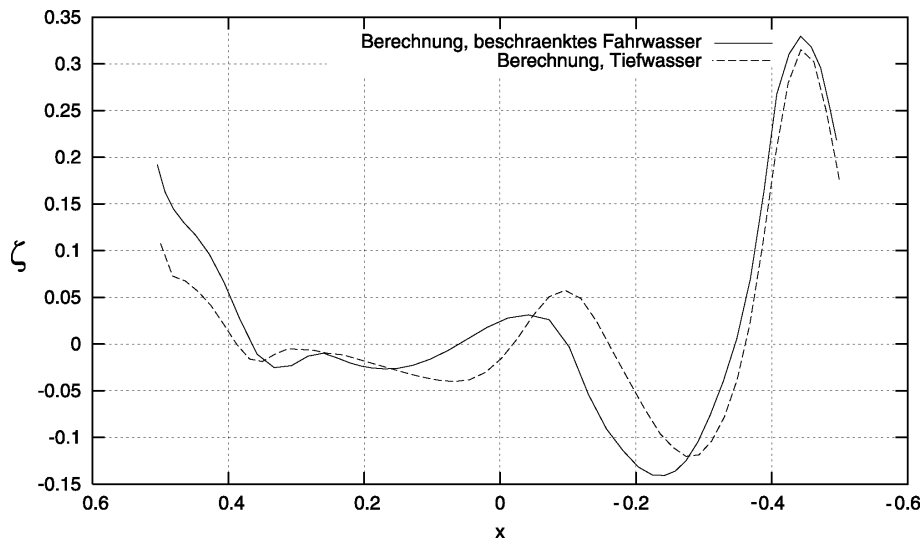


Abb. 9.19: Berechnete Wellenerhebung, beschränktes Fahrwasser, $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$, Bug bei $x = -0.5$, Heck bei $x = 0.5$

9.3 Simulationen für eine Binnenschiffsgeometrie

Das folgende Berechnungsbeispiel behandelt die Umströmung eines Binnenschiffes bei einer typisch langsamen Fahrtgeschwindigkeit im beschränkten Fahrwasser. Zu dieser Rumpfform wurde parallel im großen Flachwassertank des DST eine physikalische Modellversuchsserie durchgeführt, die hier zur Validierung herangezogen werden kann. Die Hauptabmessungen für den hier untersuchten Tiefgang sind in der Tabelle 9.4 zusammengefasst:

Symbol	Dim	Modell	Schiff
λ	-	15.80	1
L_{WL}	m	5.496	86.84
B	m	0.772	11.41
T	m	0.158, 0.237	2.50, 3.75
D	m ³	0.532, 0.831	2100, 3277
S	m ²	5.167, 6.048	1290, 1510

Tab. 9.4: Hauptabmessungen des Binnenschiffes

Das Modell wurde für eine Sonderversuchsserie im Hinterschiffsbereich mit 72 Druckanbohrungen versehen, so dass Aussagen über die Druckverhältnisse im Einflussbereich des Propellers gemacht werden konnten. Die Druckmessungen wurden im Widerstands- sowie im Propulsionsversuch durchgeführt. Für den stationären Vergleich mit dem Volumenkraftmodell des Propellers in der Simulation wurden die periodischen Druckschwankungen über einen geeigneten Zeitraum gemittelt.

Gittergenerierung für kleine Froude-Zahlen Die praktische Operationsgeschwindigkeit für den untersuchten Binnenschiffstyp führt zu sehr kleinen Froude-Zahlen (hier wurde aus der Serie $Fr = 0.095$ gewählt). Das dabei auftretende sekundäre Wellensystem ist relativ kurzwellig mit kleinen Wellenamplituden, so dass es schwierig ist, eine geeignete räumliche Diskretisierung zu finden. Ein iteratives Herantasten führte zu dem in Abb. (9.20) skizzierten Berechnungsgitter, das einen Kompromiss aus notwendiger Auflösungsgenauigkeit und handhabbarer Speicheradressierung darstellt. Dieses Berechnungsgitter besteht aus etwa 2 Millionen Knotenpunkten bzw. einer entsprechenden Anzahl von 8 Millionen Tetraedern. Das führt bei der derzeitigen Zerlegungstechnik der Gitter zu der maximal adressierbaren Speicherbelegung auf einem 32-Bit Computersystem.

Berechnungsergebnisse für den Widerstandsversuch Die Abbildungen (9.23) und (9.24) zeigen den Vergleich zwischen den berechneten und gemessenen Druckwerten

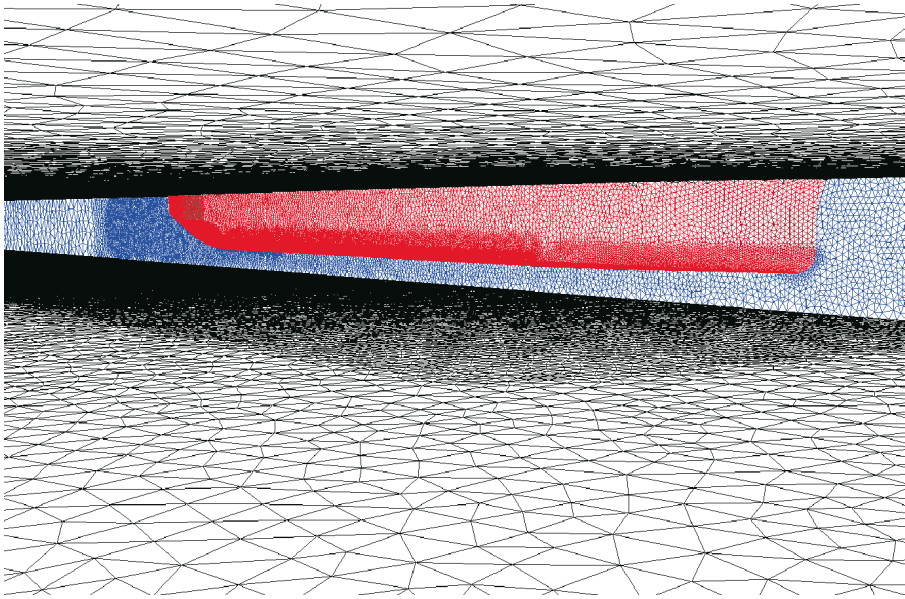


Abb. 9.20: Berechnungsgitter für die Referenzform, Gesamtansicht, ca. 8 Mio Kontrollvolumina

am Boden des Schlepptanks bzw. an der Außenhaut am Heck des Schiffsrumpfes. Im weiss markierten Bereich in Abb. (9.24) konnte aufgrund der baulich bedingten Enge keine Messensorik untergebracht werden. Die Drücke am Boden wurden im Modellversuch bei Vorbeifahrt des Modells als Zeitreihe aufgezeichnet. Über die bekannte, konstante Schleppgeschwindigkeit und ein Synchronisierungssignal wird dieser Zeitschrieb in Ortskoordinaten umgerechnet. Nach derselben Methode werden die zeitlichen Aufzeichnungen der im Tank stationär installierten Sonden zur Messung der Wasseroberflächenverformung umgerechnet. In Abb. (9.22) ist die Messung der Berechnung gegenübergestellt. Der perspektivischen Darstellung Abb. (9.21) können keine numerischen Größen entnommen werden, allerdings wird das geringe Maß der Oberflächenverformung bei 6-facher Überhöhung der Wellenerhebung deutlich.

Für eine unmittelbare quantitative Aussage sind durch das Berechnungsbiet entsprechend der Wellensondenordnung im Modellversuch Längsschnitte gelegt. Die sich ergebenden Wellenschnitte sind in Abb. (9.25) zusammen gegenübergestellt. Klar zu erkennen ist die gute Übereinstimmung des primären Wellensystems bei allen seitlichen Schnitten. Lediglich das sekundäre System zeigt im Hinterschiffsbereich Abweichungen von den Messwerten. Hier hat zum einen die in der Simulation unberücksichtigt gebliebene Veränderung der dynamischen Schwimm Lage und zum anderen die numerische Behandlung des teilgetauchten Spiegelhecks einen Einfluss. Berechnungsversuche mit statisch veränderten Ausgangsschwimmlagen lieferten eine Verbesserung der Ergebnisse - bedingen dann allerdings Fehler an anderer Stelle. Die derzeitige Erweiterung des Codes zur Berechnung dynamischer Schwimmlagen lassen daher eine deutliche Verbesserung erwarten.

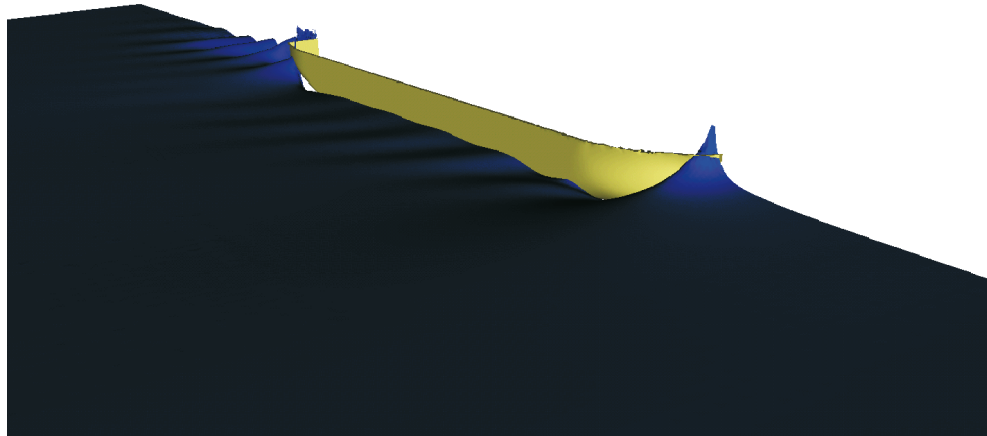


Abb. 9.21: Berechnete Oberflächenverformung, stationäre Lösung, 6-fache Überhöhung der Wellenerhebung

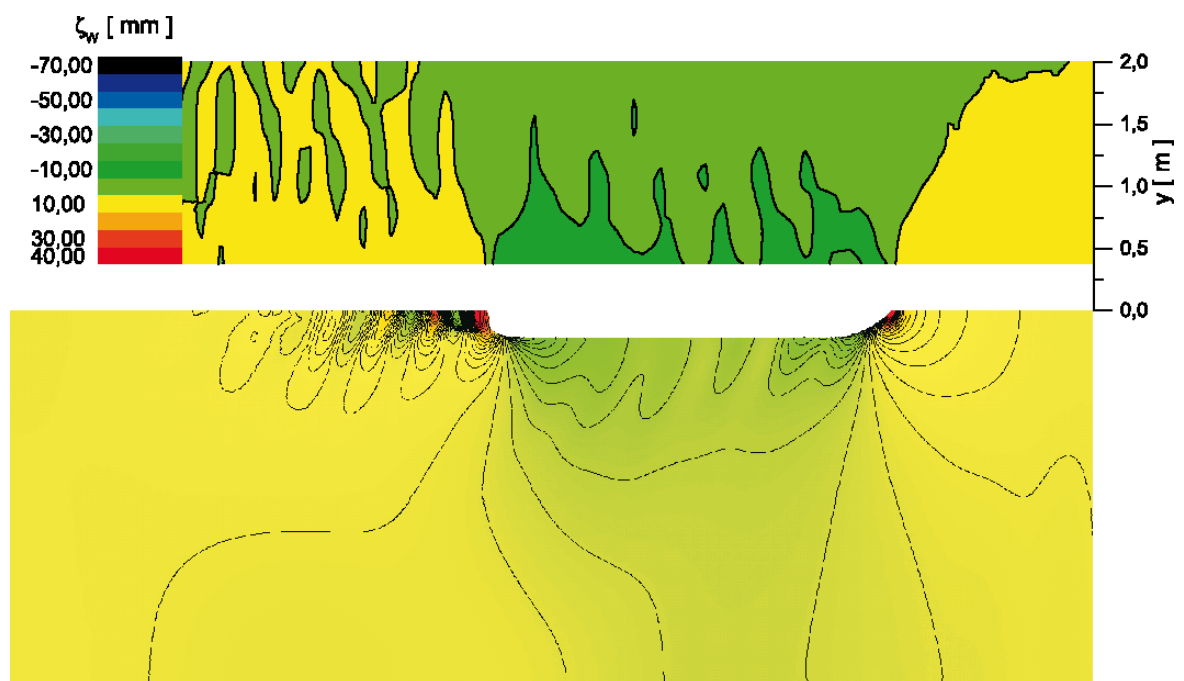


Abb. 9.22: Berechnete Oberflächenverformung (unten), Konturdarstellung im Vergleich mit dem Modellversuch (oben), stationäre Lösung, Zuströmung von rechts



Abb. 9.23: Berechnete Druckverteilung am Kanalboden (unten), Konturdarstellung im Vergleich mit dem Modellversuch (oben), stationäre Lösung, Zuströmung von rechts

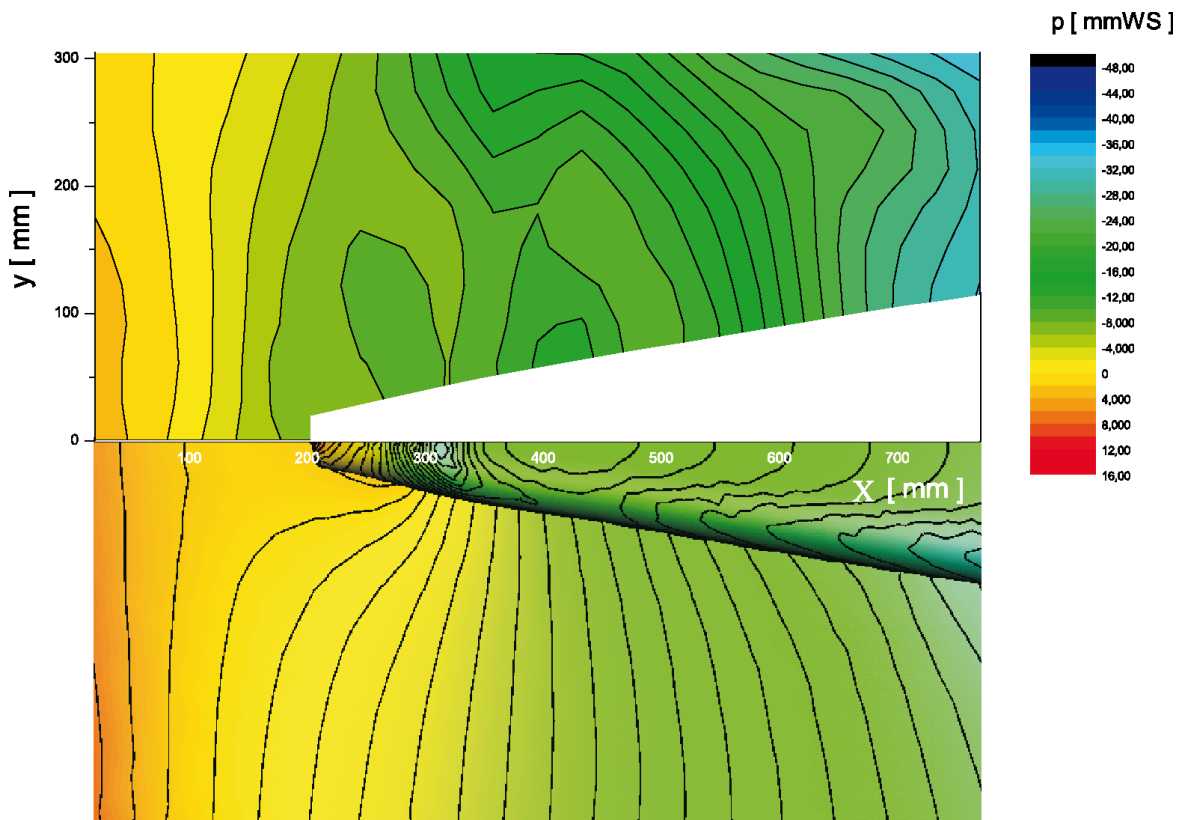


Abb. 9.24: Berechnete Druckverteilung am Schiffsheck (unten), Konturdarstellung im Vergleich mit dem Modellversuch (oben), stationäre Lösung, Zuströmung von rechts

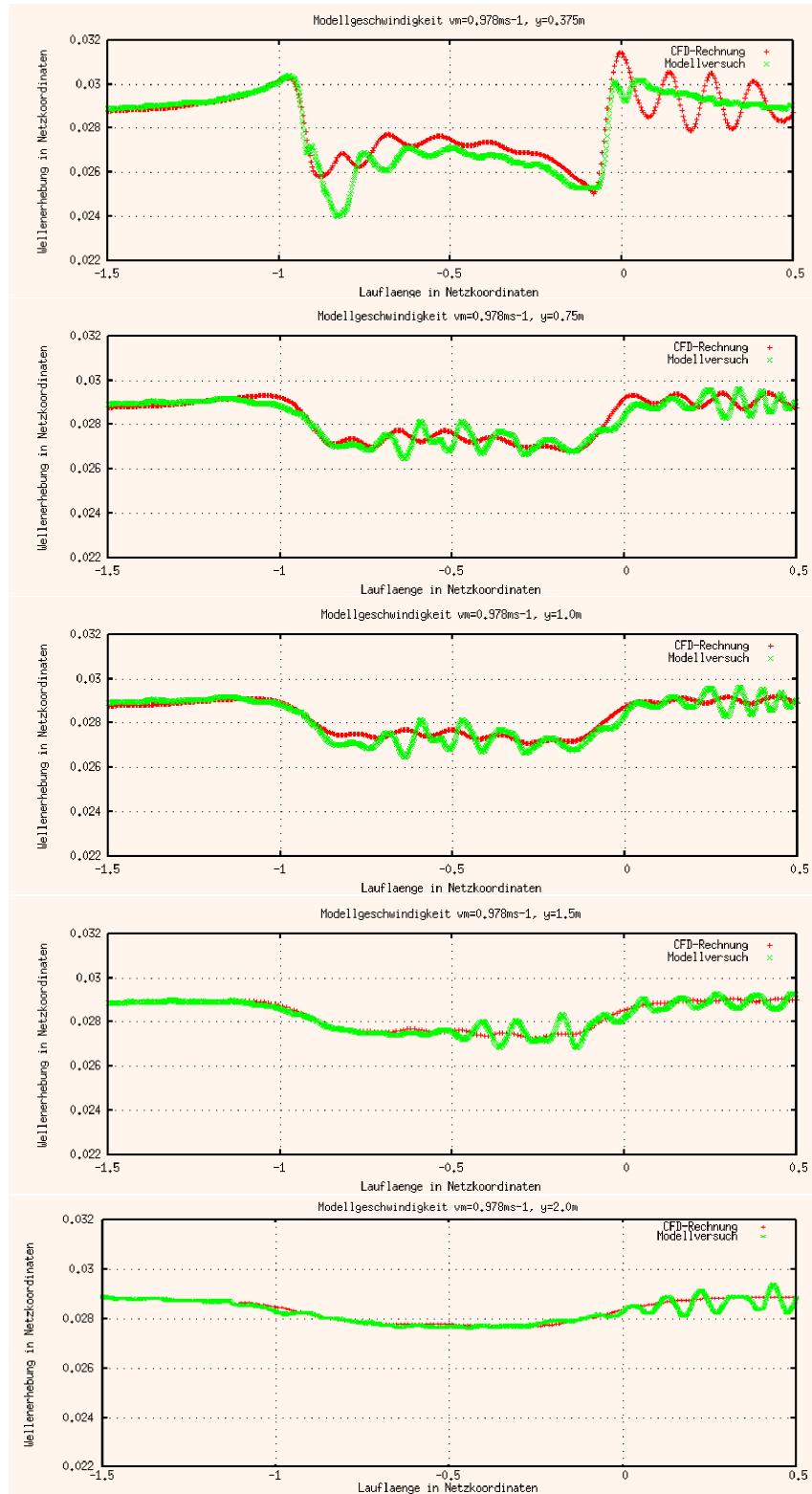


Abb. 9.25: Quantitativer Vergleich der Wellenprofile. Hinweis: Bug bei Netzkoordinate $x = -1$, Heck bei Netzkoordinate $y = 0$

Berechnungsergebnisse für den Propulsionsversuch Bei den folgenden Berechnungen wurde das in Kap. 6 beschriebene Flächenkraftmodell für den Propeller eingesetzt, um dessen Wirkung nachzuempfinden. Hierfür wurde das Berechnungsgitter zwar im Bereich der Propellerposition lokal etwas verfeinert, allerdings haben Testrechnungen nur geringfügige Unterschiede zu Berechnungen auf dem Gitter für den Widerstandsversuch gezeitigt. Prinzipiell ist es daher möglich, die konvergierte Berechnungslösung des Widerstandsversuchs als Startlösung für die Simulation mit dem Flächenkraftmodell des Propellers zu verwenden. Damit ist der zusätzliche Rechenaufwand relativ gering. Die Eingangsdaten für das Propellermodell sind in der Tabelle 9.5 zusammengefasst.

Symbol	Dim	Wert
Fr	-	0.095
U	ms^{-1}	0.699
T	N	9.228
Q	Nm	0.1765
n	s^{-1}	10.58
R_P	mm	62.5
R_H	mm	12.5

Tab. 9.5: Eingangsdaten für das Propellerkraftmodell

Die Abb. (9.26) zeigt als Hauptergebnis die berechnete Druckverteilung am Hinterschiff verglichen mit den Messungen aus dem Modellversuch. Der Vergleich zeigt prinzipiell eine gute Übereinstimmung, zumal die Verteilung der Propellerkäfte nicht durch die Veränderung des Nachstroms iterativ neu berechnet wurde. Die analytische Verteilung der Kraftanteile nach Kap. 6.1.1 erweist sich daher als praktikabel. Die Druckverteilung an der Schiffsaussenhaut unmittelbar hinter dem Propeller konnte in der Simulation gut nachgerechnet werden. Innerhalb der Heckwulstkonfiguration befindet sich einerseits die Wellenanlage des Antriebs und andererseits ergeben sich durch den Modellmaßstab zu kleine Abmessungen, um geeignete Druckanbohrungen für die Sensorik unterzubringen. Hier existieren keine Messwerte und in der Abbildung ist Bereich weiß dargestellt.

In der Abb. (9.27) ist anschaulich der Einfluss der Propellerwirkung im Unterschied zu dem Widerstandsversuch durch den Verlauf der Stromlinien erkennbar. Die Interaktion mit der freien Oberfläche hat sich, solange der Propeller, wie in diesem Fall, ständig getaucht bleibt, als problemlos erwiesen (s. Abb. (9.28)).

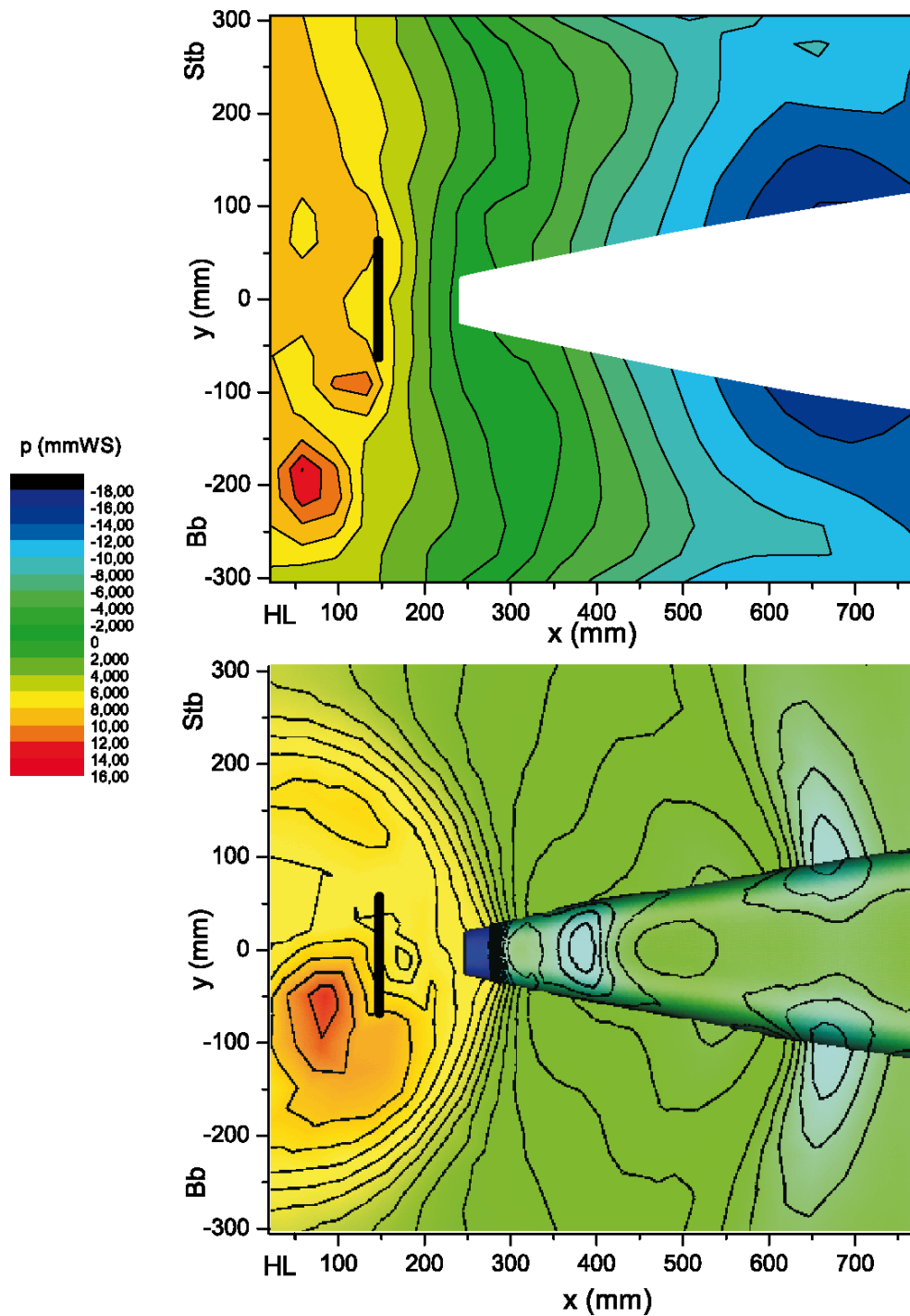


Abb. 9.26: Berechnete Druckverteilung am Schiffsheck im Propulsionsversuch, Konturdarstellung. Oben: Messung im Modellversuch, unten: Simulation mit dem Flächenkraftmodell, stationäre Lösung, Strömung von rechts, Propellerscheibe an der Position $x=135$ mm

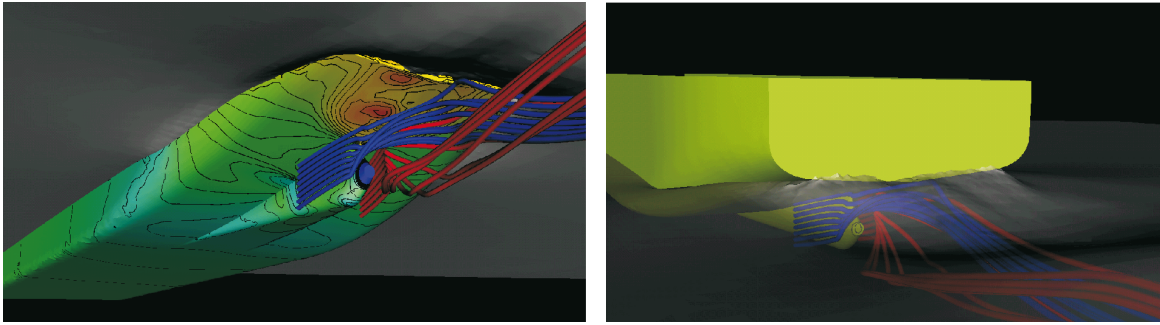


Abb. 9.28: Wechselwirkung des Propellermodells mit der freien Oberfläche (Level-Set Methode). Links: Unterwasseransicht, rechts: Überwasseransicht. Zusätzlich sind ausgewählte Stromlinien eingetragen: backbord blau, steuerbord rot.

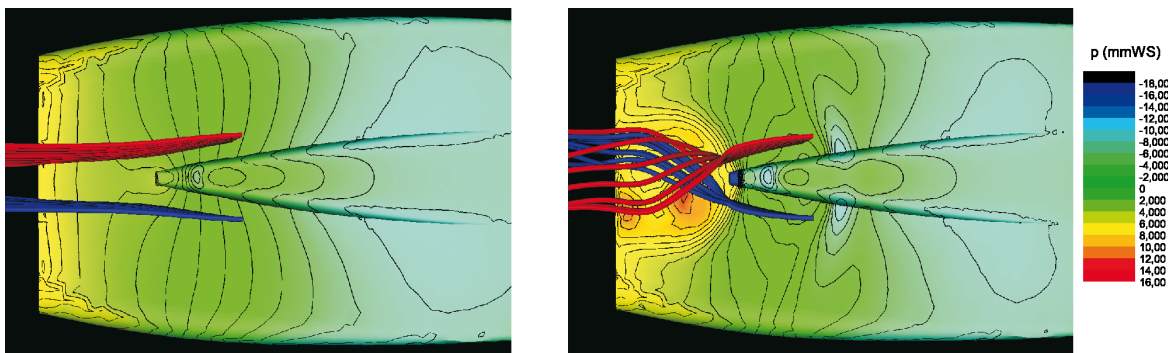


Abb. 9.27: Berechnete Druckverteilung am Schiffsheck, Konturdarstellung. Links: Berechnung ohne Propellermodell, rechts: mit Propellermodell, stationäre Lösung, Strömung von rechts. Zusätzlich sind ausgewählte Stromlinien eingetragen: backbord blau, steuerbord rot.

9.4 Numerische Nachrechnung und Modellversuch zur völligen Auslöschung von Schiffswellen

9.4.1 Motivation

Anhand einer rein theoretischen Analyse [14], [15], inspiriert durch eine Beobachtung in einem Schiffsmodellversuch, konnte für ein im geeignet schmalen Flachwasserkanal laufendes, schlankes Schiff gezeigt werden, dass sich mit entsprechend geformter Rumpfgeometrie die Bug- bzw. Heckwellen bei einer überkritisch gewählten Geschwindigkeit gegenseitig völlig auslöschen. Hinter dem Schiff verbleibt kein Wellensystem und demnach verschwindet theoretisch der Wellenwiderstand. Die Theorie beschränkt sich allerdings auf schwache Nichtlinearitäten und die Wirkung der Viskosität bleibt unberücksichtigt. Im Flachwassertank des DST wurde daher ein Modellversuch durchgeführt, in dem die Existenz einer wellenwiderstandslosen Rumpf-Kanal Konfiguration bestätigt werden konnte. Die Entwurfsdaten für diesen Modellversuch wurden anhand einer analytischen Theorie inklusive deren Verbesserungen seit der ursprünglichen Überlegung 1994-95, Chen 1999 [13] bestimmt. Der daraus ermittelte wellenlose Zustand trat bei der exakt vorhergesagten Entwurfsgeschwindigkeit auf.

Bei überkritischer Fahrt mit einer Schiffsgeschwindigkeit $U > \sqrt{gh}$, der Erdbeschleunigung g und der Wassertiefe h ist das Wellensystem eines Schiffes mit den Stoßwellen eines 2D- Tragflügels im Überschallflug vergleichbar, wobei sich die Bug- und Heckwellen gemäß ihrer Charakteristik schräg nach hinten ausbreiten. Hierbei entspricht die Bugwelle einer Wasserspiegelanhebung, die Heckwelle einer Absenkung. Aus der Natur der nichtlinearen Flachwasserwellen kann eine Wasserspiegelanhebung eine permanente reine Schrägsolitonwelle bei entsprechender Bugform bilden, eine Oberflächenmulde allerdings kann keine “negative Solitonwelle” darstellen. Läuft nun ein Schiff symmetrisch zur Mittellängsebene eines schmalen Flachwasserkanals mit rechtwinkliger Querschnittsfläche, werden die Schiffswellen an den vertikalen Kanalwänden reflektiert. Wird jetzt die Rumpfgeometrie und die Fahrgeschwindigkeit entsprechend der Theorie passend gewählt, treffen die reflektierten Bugwellen derart auf das Hinterschiff, dass die Heckwellen völlig ausgelöscht werden und bei dieser Entwurfsgeschwindigkeit die Wellen im Nachlauf völlig verschwinden, s. Abb. (??).

Im folgenden wird das gebaute Rumpfmodell vorgestellt, die Hauptergebnisse des Experiments und der numerischen Nachrechnung zusammengefasst. Für weiterführende Details bezüglich der vorangegangenen theoretischen Entwurfsstrategie und des von den Autoren durchgeführten Modellversuchs sei auf [16] bzw. [12] hingewiesen.

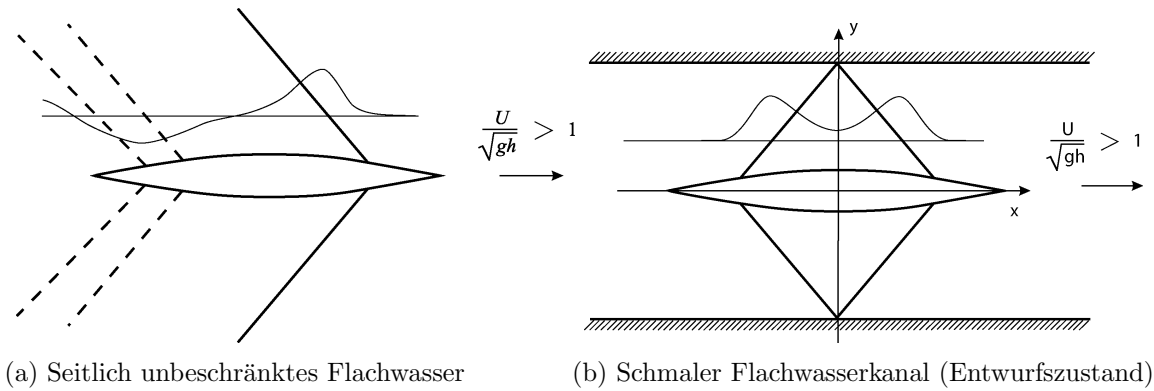


Abb. 9.29: Schema des Wellenbilds bei überkritischer Geschwindigkeit

9.4.2 Entwurf des Rumpfmodells

Die Vorgehensweise beim Entwurf besteht im wesentlichen aus zwei Schritten: Zunächst ergeben sich aus der Theorie für eine gewählte Tiefen-Froude-Zahl $Fr_h = U/\sqrt{gh}$ die Spantflächenkurve und eine dazugehörige Kanalbreite. Im zweiten Schritt muß aus praktischen Gesichtspunkten einer strakenden und einfachen Rumpfgeometrie ein Spantenriss entworfen werden. Zwecks Vereinfachung sei das Modell gefesselt angenommen, d.h. eine Vertrimmung oder Absenkung ist ausgeschlossen. Dieses ist keine notwendige Forderung aus der Theorie, wohl reduziert es den Aufwand im Modellversuch und eventuelle Abweichungen aus Vertrimmung und Absenkung und deren Rückwirkungen können, verglichen mit der theoretischen Vorhersage, ausgeschlossen werden.

Prinzipiell verbleiben noch drei weitere frei wählbare dimensionslose Parameter woraus sich zunächst eine dimensionslose Rumpf-Kanal Konfiguration, d.h. eine Familie aus Geosims mit der wellenauslöschenden Eigenschaft bei einer definierten Tiefen-Froude-Zahl Fr_h ergibt. Die letztendlich gewählten Dimensionen im praktischen Modellversuch ergaben sich aus den Abmaßen des DST-Schlepptanks mit 200 m Länge, 9.8 m Breite und 1.3 m maximal einstellbarer Wassertiefe. Aus der Erfahrung vorangegangener Modellversuche wurde die Tiefen-Froude-Zahl mit $Fr_h = \sqrt{2}$ frei gewählt, die Wassertiefe mit $h = 0.2$ m eingestellt, um eine durchführbare Schleppgeschwindigkeit zu erreichen und die Kanalbreite $w = 3.8$ m festgelegt, um eine sinnvolle Modelllänge zu erhalten. Schließlich wurden die noch freien Parameter derart eingestellt, daß die damit erzielbare Verdrängung ein Kompromiss aus extremer Schlankeit des Rumpfes und unerwünscht starker Nichtlinearität der Wellen darstellt.

Die wichtigsten Abmessungen des endgültigen Entwurfes sind in Tab. (9.6) zusammengestellt. Der Spantenriss und die Spantarealkurve sind in den Abb. (9.30) dargestellt.

Größe	Symbol	Wert
Wasserlinienlänge	L	6 m
Breite mitschiffs	B	0.3892 m
Tiefgang	T	0.15 m
Hauptspanntfläche	S_m	0.05063 m ²
Verdrängung	∇	0.1283 m ³
Benetzte Oberfläche	S_0	2.437 m ²
Blockkoeffizient	$C_B = \nabla / LBT$	0.3663
Hauptspanntvölligkeit	$C_M = S_m / BT$	0.8672
Koeffizient der benetzten Oberfläche	$C_{WS} = S_0 / \sqrt{\nabla L}$	2.7776
Länge/Wassertiefe	L/h	30
Tiefgang/Wassertiefe	T/h	0.75
Entwurfsgeschwindigkeit	U	1.9803 ms ⁻¹
Entwurfs-Tiefen-Froude-Zahl	$Fr_h = U / \sqrt{gh}$	1.414
Entwurfswassertiefe	h	0.2 m
Entwurfs-Kanalbreite	w	3.8 m
Kanalbreite/Wassertiefe	w/h	19

Tab. 9.6: Hauptabmessungen des Modellrumpfes und des Kanals.

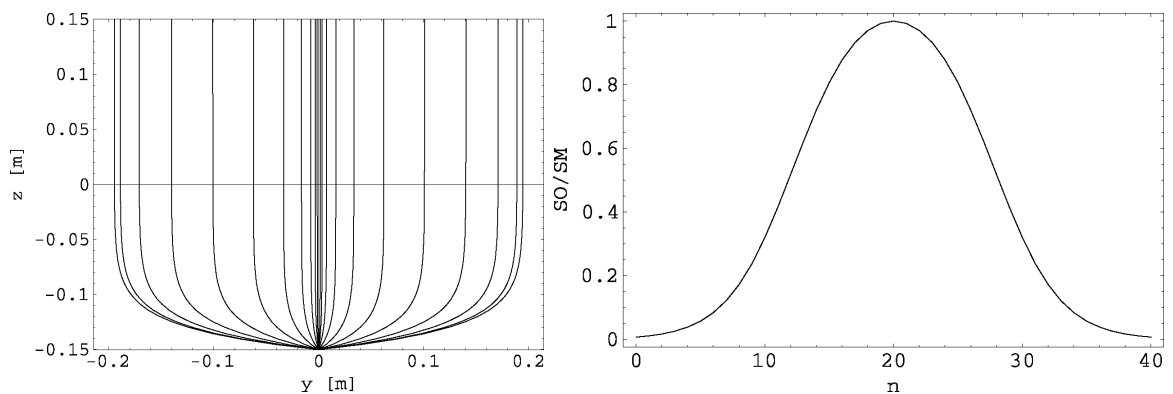


Abb. 9.30: Links: Spantenriss des Rumpfes mit 21 äquidistant verteilten Spanten.
Rechts: Spantarealkurve beginnend vom Bug (Spant 0) bis zum Heck (Spant 40)

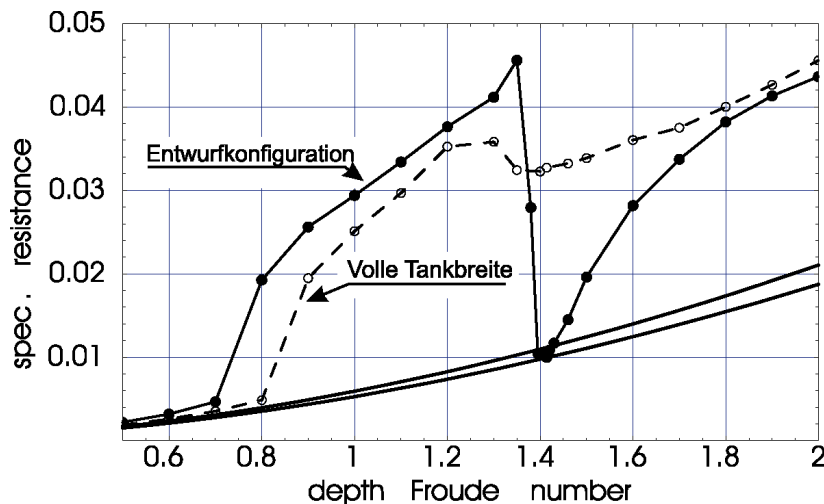


Abb. 9.31: Gemessener spezifischer Gesamtwiderstand im Entwurfskanal (durchgezogene Linie) und im Tank voller Breite (gestrichelte Linie); die beiden glatten Kurven zeigen den spezifischen Reibungswiderstand nach Hughes (untere) bzw. ITTC (obere).

9.4.3 Modellexperiment

Im physikalischen Modellversuch ist der Rumpf mit verschiedenen stationären Geschwindigkeiten in einem weiten Bereich um den Entwurfszustand geschleppt worden. Neben der eigentlichen Entwurfskonfiguration ($h = 0.2$ m, $w = 3.8$ m) ist das Modell auch bei voller Tankbreite ($h = 0.2$ m, $w = 9.8$ m) untersucht worden, um Referenzmessungen im seitlich nahezu unbeschränkten Fahrwasser liefern zu können. Bei allen Versuchen ist das Modell gefesselt geschleppt worden, d.h. eine Absenkung und Vertrimmung des Modells wurde nicht zugelassen.

Die Abb. (9.31) zeigt das wichtigste Versuchsergebnis, die Gegenüberstellung der gemessenen spezifischen Gesamtwiderstände $R_T/(\rho g \nabla)$ im Kanal mit Entwurfsbreite (durchgezogene Linie) bzw. im seitlich unbeschränkten Fahrwasser (volle Kanalbreite, gestrichelte Linie) mit derselben Entwurfswassertiefe. Zur Bestimmung des Wellenwiderstandsanteils, der im Modellversuch nicht direkt messbar ist, sind in der Abb. (9.31) zusätzliche Kurven des spezifischen Reibungswiderstandes $R_F/(\rho g \nabla)$ nach Hughes bzw. nach ITTC-1957 angegeben. Die Reibungslinie nach Hughes (1952, 1954), gültig für die vollturbulente 2-D Strömung einer unendlich dünnen Platte, beinhaltet keinen viskosen Formfaktor verglichen mit der ITTC-Korrelationslinie, die einen Formfaktor von 1.12 als minimalen Wert üblicher Rumpfformen impliziert.

Wie theoretisch vorhergesagt, fällt der gemessene Gesamtwiderstand für die Versuche im schmalen Kanal bei der Entwurfs-Tiefen-Froude-Zahl $Fr_h = 1.414$ dramatisch ab, während im seitlich unbeschränkten Fall nichts außergewöhnliches zu beobachten ist. Quantitativ ausgedrückt liegt der spezifische Gesamtwiderstand bei $Fr_h = 1.414$ mit 0.0102 um 69 % unterhalb des Wertes 0.0327 im breiten Tank. Die entsprechenden

spezifischen Reibungswiderstände liegen bei 0.00994 nach Hughes und 0.01116 nach ITTC. Folglich konnte der Restwiderstandsanteil ($R_R = R_T - R_F$) basierend auf der Hughes-Linie um 99 % bzw. um 104 % gemäß der ITTC-Korrelationslinie reduziert werden.

Zur Darstellung von Längsschnitten des Wellenbildes sind im Tank normal zur Fahrtrichtung sechs äquidistant angeordnete Wellensonden installiert, an denen die Oberflächenverformung während der stationären Vorbeifahrt des Modells zeitlich aufgezeichnet wurde. Hierbei konnten bis auf eine Ausnahme aufgrund zu vermeidender Kollision in beiden Versuchsreihen (Entwurfskanalbreite bzw. volle Tankbreite) die Positionen der Wellensonden unverändert bleiben.

Die Abb. (9.34) zeigt die bekannt hohen Wellen im Nachlauf als Referenzmessung im nahezu unbeschränkten Fahrwasser (volle Tankbreite) verglichen mit der verschwindend kleinen Oberflächenverformung im schmalen Entwurfskanal, die mit dem deutlichen Einbruch des Wellenwiderstandes einhergeht. Zahlenmäßig liegt die höchste Amplitude der freien Wellen für die Referenzmessung bei 100 mm verglichen mit nur 4 mm für die Entwurfskonfiguration.

9.4.4 Numerische Nachrechnung

Die vorangegangene theoretische und experimentelle Untersuchung zum Phänomen der Wellenauslöschung ist mit einer numerischen Simulation ergänzt worden. Um die Berechnung auf das Verschwinden des Wellenwiderstandes zu fokussieren, wurde das Fluid als reibungsfrei angenommen.

Die Abb. (9.32) zeigt den numerisch durch Integration der Normalkräfte auf den Rumpf berechneten Wellenwiderstand, der mit Hilfe der Hughes-Reibungslinie bestimmten Restwiderstand aus dem Modellversuch gegenübergestellt ist. Die gezeigte Übereinstimmung ist bis auf eine Lücke bei transkritischer Geschwindigkeit sehr gut.

Eine perspektivische Darstellung der rechten Rumpfhälfte mit der numerisch berechneten Wasseroberflächenverformung ist in der Abb. (9.33) dargestellt. Das Modell läuft von links nach rechts (gelbe Fläche) und auf dem Kanalboden ist der Bodendruckverlauf anhand von Isolinien dargestellt. Die blaue Fläche zeigt die sich einstellende freie Wasseroberfläche im wellenwiderstandslosen Zustand. Deutlich erkennbar ist das halb-rautenförmige Wellenbild mit den zwei schrägen Wellenkämmen an der Rumpfaußenseite, die zu einem Wellenberg etwa doppelter Höhe an der Kanalaußenseite zusammenlaufen, erkennbar. Diesem lokalen Wellenbild folgen keine freien Wellen hinter dem Modell.

Ein unmittelbarer Vergleich der potentialtheoretischen Berechnungsergebnisse mit den Messungen und den Euler-Berechnungen ist in Abb. (9.35) für alle sechs äquidistanten Wellenschnitte dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Wellenprofile ist vergleichsweise gut.

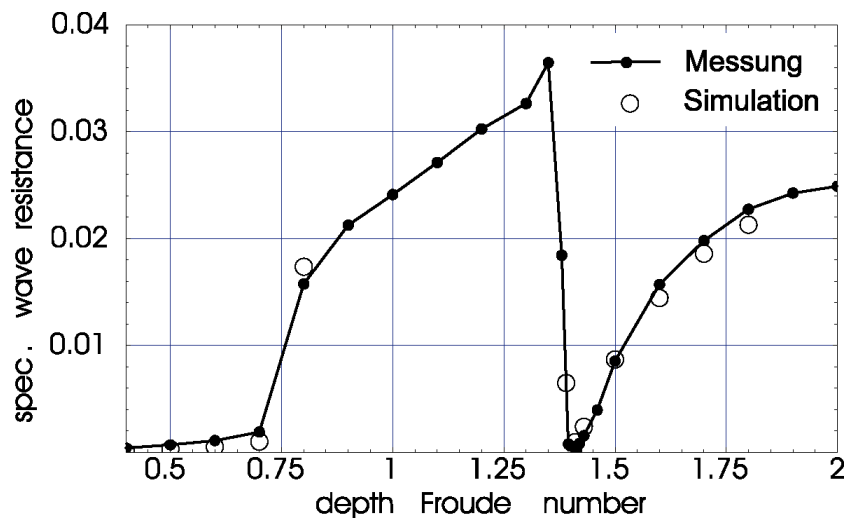


Abb. 9.32: Vergleich des gemessenen Restwiderstandes im Modellexperiment (durchgezogene Linie) mit dem berechneten Wellenwiderstand mittels der Euler-Simulation (Kreise) in einem weiten Geschwindigkeitsbereich im schmalen Kanal.

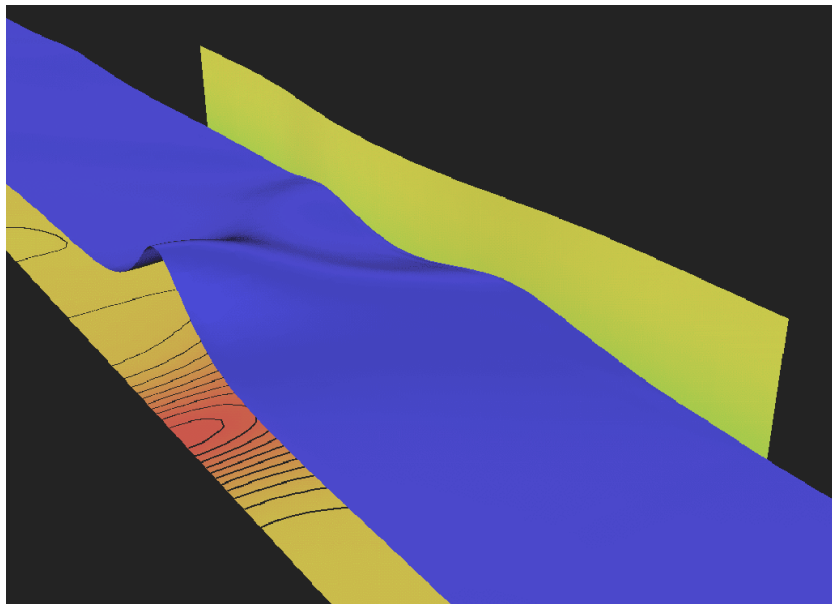


Abb. 9.33: Perspektivische Darstellung des numerisch simulierten Wellenbildes im Entwurfszustand (vertikal vierfach überhöhte Darstellung).

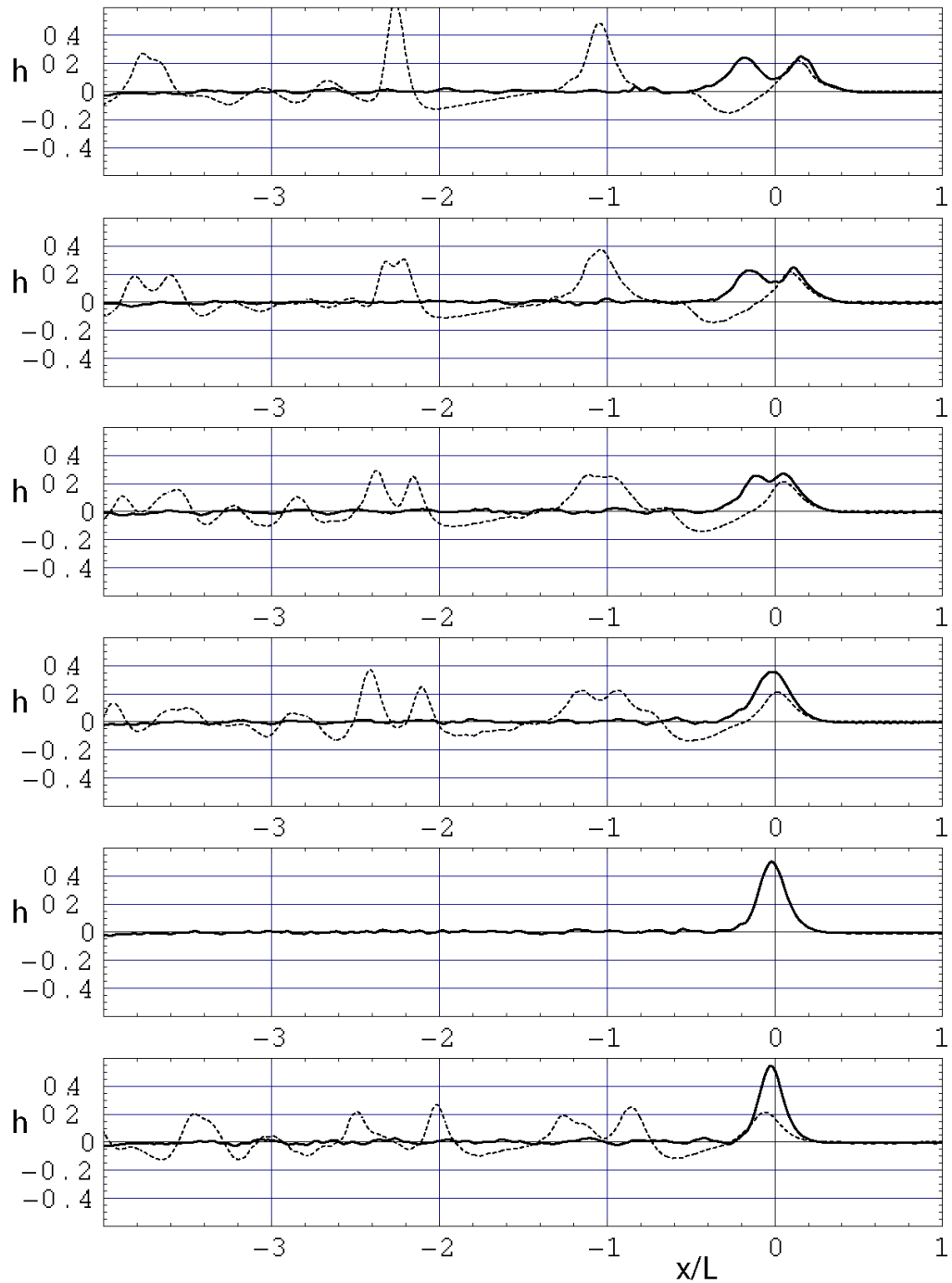


Abb. 9.34: Gemessene Wellenprofile bei Entwurfs-Tiefen-Froude-Zahl $Fr_h = 1.414$ ($h = 0.2$ m and $V = 1.98$ m/s) im 9.8 m breiten Tank (gestrichelte Linien) und im 3.8 m schmalen Kanal (durchgezogene Linien); Grafiken von oben nach unten entsprechend der Schnitte bei $y = 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5$ and 1.8 m. Bug bei $x/L = 0.5$, Heck bei $x/L = -0.5$. Hinweis: Aufgrund Versagens fehlt die Wellenmessung bei $y = 1.5$ m im breiten Tank.

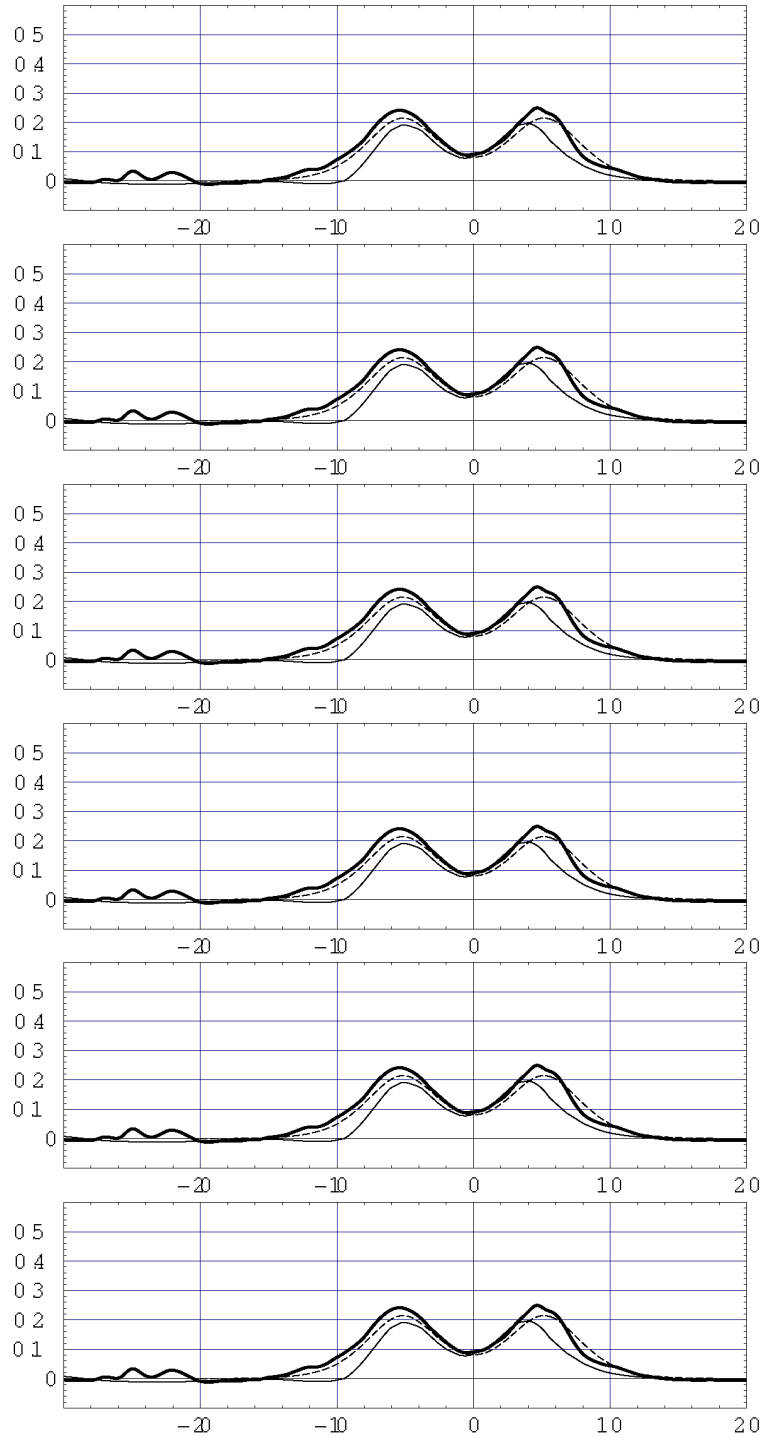


Abb. 9.35: Vergleich der theoretisch (gestrichelt), experimentell (dick durchgezogen) und numerisch (dünn durchgezogen) bestimmten Wellenprofile bei Entwurfs-Tiefen-Froude-Zahl $Fr_h = 1.414$ im schmalen Kanal; Grafiken von oben nach unten entsprechen der Schnitte bei $y/h = 1.5, 3.0, 4.5, 6.0, 7.5$ und 9.0 .

10 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung von Berechnungsroutinen zur numerischen Simulation von Schiffsumströmungen unter der Berücksichtigung der freien Wasseroberfläche und der Wirkung eines drehenden Propellers. Das Verfahren basiert auf der Lösung der dreidimensionalen Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen inkompressibler Fluide. Die ursprüngliche Formulierung für blockstrukturierte, krummlinige Gitter wurde im Laufe der Bearbeitung auf Grund des enormen Aufwands zur Erzeugung geeigneter Berechnungsgitter zu Gunsten einer Formulierung auf unstrukturierten Gittern ergänzt.

Als Ansatz zur Lösung der Gleichungen für inkompressible Fluide wurde die Methode der künstlichen Kompressibilität verwendet. Hiermit war es möglich, bekannte und robuste Diskretisierungsschemata für kompressible Strömungen aus der Aerodynamik zu verwenden.

Da nahezu alle interessierenden Schiffsumströmungen (Modell- oder Großausführung) turbulent sind, wurde ein Zwei-Gleichungsmodell der statistischen Turbulenzmodellierung implementiert, dessen Randbedingungen entsprechend des logarithmischen Wandgesetzes formuliert wurden.

Eine Besonderheit bei der Schiffsumströmung ist die freie Wasseroberfläche, für die geeignete Randbedingungen erforderlich sind. Die hier verwendete Methode basiert auf dem Level-Set Ansatz, der auf die unstrukturierte Formulierung übertragen wurde.

Die numerische Simulation der viskosen Strömung um und durch einen drehenden Propeller ist aufgrund der Komplexität und trotz zunehmender Rechenleistung mit einem enormen Aufwand verbunden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Propellerreinfluss mit Hilfe einer zusätzlich aufgebrachten Flächenkraft an der Position des Propellers approximiert. Damit der Charakter einer effizienten Gittergenerierung erhalten blieb, ist die Methode derart formuliert, dass keine Veränderungen des Gitters im Vergleich zu Berechnungen ohne Propeller benötigt werden.

Die programmtechnische Umsetzung basiert auf der am Institut für Verbrennung und Gasdynamik der Universität Duisburg-Essen entstandenen Programmierplattform MOUSE. Aufgrund des modularen Aufbaus der MOUSE-Bibliothek und der objekt-orientierten Programmiersprache ist eine große Transparenz der entwickelten Module bezüglich Anwendung und Weiterentwicklung realisiert worden.

Das Verfahren wurde an einer Anzahl von Strömungsproblemen überprüft und hat gute Übereinstimmung zwischen experimentellen und numerischen Ergebnissen gezeigt. Unter anderem wurden einige Ergebnisse für den Fall beschränkten Fahrwassers erzielt, was für den weiteren Einsatz zur Simulation von Binnenschiffen von Bedeutung ist.

Literaturverzeichnis

- [1] ABDEL-MAKSoud, M.: *Vergleichende experimentelle und numerische Untersuchungen der turbulenten Strömung am schiffsähnlichen Körper mit und ohne Propeller*. Düsseldorf : VDI Fortschrittsberichte, Reihe 7: Stömungstechnik, 1992
- [2] ABDEL-MAKSoud, M. ; HEINKE, H.-J.: Scale Effects on Ducted Propellers. In: *24th Symposium on Naval Hydrodynamics* (2002), S. 744–759
- [3] ASHGRIZ, N. ; POO, J. Y.: FLAIR: Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction. In: *Journal of Computational Physics* 93 (1991), S. 449–468
- [4] BALDWIN, B.S. ; LOMAX, H.: Thin Layer Approximation and Algebraic Model for separated Turbulent Flows / AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting. 1978. – Forschungsbericht
- [5] BET, F.: *Numerische Simulation reibungsbehafteter Strömungen um Schiffe mit freier Oberfläche*, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Dissertation, 1998
- [6] BET, F. ; HÄNEL, D. ; SHARMA, S. D.: Simulation of Hydrodynamical Free-Surface Flow. In: *Proc. of Eccomas96* INRIA, Paris, John Wiley & Sons, Ltd., 1996, S. 551–556
- [7] BET, F. ; HÄNEL, D. ; SHARMA, S. D.: Simulation of Ship Flow. In: *Proc. of Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow* 10th International Conference, Swansea 1997, Pineridge Press Limited, 1997, S. 683–694
- [8] BREUER, M.: *Numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für dreidimensionale inkompressible instationäre Strömungen zur Simulation des Wirbelaufplatzens*, RWTH Aachen, Dissertation, 1991
- [9] CEBECI, T. ; SMITH, A. M. O.: *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. Academic Press, 1974
- [10] CHAN, R.K-C. ; STREET, R. L.: A computer study of finite-amplitude water waves. In: *Journal of Computational Physics* 6 (1970), S. 68–94
- [11] CHAO, K.Y.: Numerische Propulsionsversuche. In: *HANSA, Schiffbau Forschung und Entwicklung* 9, 137. Jahrgang (2000), S. 168–174
- [12] CHEN, X. N. ; SHARMA, S. D. ; STUNTZ, N.: Complete Cancellation of Ship Waves in a Narrow Shallow Channel. In: *24th Symposium on Naval Hydrodynamics* Fukuoka, Japan, 2002, S. 428–440

- [13] CHEN, X.N.: *Hydrodynamics of Wave-Making in Shallow Water*, Universität Stuttgart, Dissertation, 1999
- [14] CHEN, X.N. ; SHARMA, S.D.: Nonlinear theory of asymmetric motion of a slender ship in a shallow channel. In: *20th Symposium on Naval Hydrodynamics* Santa Barbara, California, 1994, S. 386–407
- [15] CHEN, X.N. ; SHARMA, S.D.: On ships in a shallow channel. In: *21st Symposium on Naval Hydrodynamics* Trondheim, Norway, 1996, S. 715–726
- [16] CHEN, X.N. ; SHARMA, S.D. ; STUNTZ, N.: Zero wave resistance for ships moving in shallow channels at supercritical speeds. Part 2. Improved theory and model experiment. In: *Journal of Fluid Mechanics* 478 (2003), S. 111–124
- [17] CHORIN, A. J.: A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. In: *Journal of Computational Physics* 2 (1967), S. 12–26
- [18] FALCOVITZ, J. ; ALFANDARY, G. ; HANOCH, G.: A Two-Dimensional Conservation Laws Scheme for Compressible Flows with Moving Boundaries. In: *Journal of Computational Physics* 138 (1997), S. 83–102
- [19] FARMER, J. ; MARTINELLI, L. ; JAMESON, A.: A Fast Multigrid Method for Solving the Nonlinear Ship Wave Problem with a Free Surface. In: *6th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics* Iowa City, Iowa, 1993, S. 155–172
- [20] GLOTH, O.: *An Object-Oriented Finite Volumen Framework and its Application to Fluid Dynamic Problems*, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Dissertation, 2002
- [21] HÄNEL, D.: *Einführung in die numerische Fluidodynamik, Vorlesungsskript*. 1992. – Institut für Verbrennung und Gasdynamik, Fachbereich Maschinenbau, Gerhard-Mercator Universität-GH-Duisburg
- [22] HÄNEL, D.: *Grundlagen laminarer und turbulenter Strömungen, Vorlesungsskript*. 2001. – Institut für Verbrennung und Gasdynamik, Fachbereich Maschinenbau, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg
- [23] HÄNEL, D. ; BREUER, M. ; KLÖKER, J. ; MEINKE, M.: Numerical Study on a Viscous Flow with Free-Surface Waves About a Ship in Steady Straight Course by a Finite Volume Method. In: *Computer and Fluids* 22 (1993), S. 229–237
- [24] HARLOW, F. H. ; WELCH, J.E.: Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. In: *Physics of Fluids* 8 (1965), S. 2182–2189
- [25] HENN, R. ; JIANG, T. ; STUNTZ, N. ; HÄNEL, D. ; STEFFEN, R. ; VILSMEIER, R.: DST-Bericht Nr. 1766: Simulationssoftware für hydrodynamische Probleme - Schiff und Antrieb in begrenzten Gewässern / DST, Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme e.V. 2005. – Forschungsbericht

-
- [26] HINO, T. ; MARTINELLI, L. ; JAMESON, A.: A Finite-Volume Method with Unstructured Grid for Free Surface Flow Simulations. In: *Sixth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics* (1993), S. 173–194
- [27] HIRSCH, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Chichester : John Wiley & Sons, 1991. – 2 Volumes
- [28] HIRT, C.W. ; NICHOLS, B.D.: Volume of fluid (VOF) method for dynamics of free boundaries. In: *Journal of Computational Physics* 2 (1981), S. 403–411
- [29] HOUGH, G.R. ; ORDWAY, D.E.: The Generalized Actuator Disk. In: *Developments in Theoretical and Applied Mechanics* 2 (1965), S. 317–336
- [30] ISSA, R.I.: Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator splitting. In: *Journal of Computational Physics* 62 (1986), S. 40–65
- [31] JAMESON, A. ; SCHMIDT, W. ; TURKEL, E.: Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. In: *Proc. of AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference* AIAA, Palo Alto, California, 1981
- [32] KAWAMURA, T. ; MIYATA, H.: Simulation of Nonlinear Ship Flows by Density-Function Method. In: *Journal of the Society of Naval Architects, Japan* 176 (1995), S. 1–10
- [33] KIM, J. ; MOIN, P.: Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations. In: *Journal of Computational Physics* 59 (1985), S. 308–323
- [34] KOHTE, D.B. ; RIDER, W.J.: Comments on Modelling Interfacial Flows with Volume-of-Fluid Methods / Los Alamos National Laboratory. 1995 (65P05, 76T05). – Forschungsbericht
- [35] LAM, C.K.G. ; BREMHORST, K.A.: Modified Form of the $k - \varepsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence. In: *Trans. ASME, Journal of Fluids Eng.* 103 (1981), S. 456–460
- [36] LAUNDER, B.E. ; REECE, G.J. ; RODI, W.: Progress in the Development of a Reynolds-stress Turbulence Closure. In: *Journal of Fluid Mechanics* 68 (1975), S. 537–566
- [37] LAUNDER, B.E. ; SPALDING, D.B.: *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, 1972
- [38] LAUNDER, B.E. ; SPALDING, D.B.: The Numerical Computation of Turbulent Flows. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3 (1974), S. 269–289
- [39] LEONARD, A.: Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows. In: *Advances Geophysics* 18A (1974), S. 237

- [40] MCCARTHY, J.H.: Collected Experimental Resistance Component and Flow Data for Three Surface Ship Model Hulls / D. W. Taylor Naval Ship Research and Development Center. 1985. – Forschungsbericht
- [41] MENTER, F.R.: Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. In: *AIAA Journal* 32 (1994), S. 1598–1605
- [42] MIYATA, H. ; HISHIMURA, S. ; MASUKO, A.: Finite difference simulation of nonlinear waves generated by ships of arbitrary three-dimensional configuration. In: *Journal of Computational Physics* 60 (1985), S. 391–436
- [43] MULDER, W. ; OSHER, S.: Computing Interface Motion in Compressible Gas Dynamics. In: *Journal of Computational Physics* 100 (1992), S. 209–228
- [44] NAKATAKE, K. ; ANDO, J. ; KATAOKA, K.: Free surface effect on hull-propeller-rudder interactions. In: *17th Symposium on Naval Hydrodynamics* Den Haag, 1988, S. 445–459
- [45] NAOI, D. ; RODI, W.: Numerical Simulation of Secondary Currents in Channel Flow. In: *Journal of Hydraulic Division ASCE* 108 (1982), S. 1308–1319
- [46] NEWMAN, J. N.: *Marine Hydrodynamics*. Cambridge : MIT Press, 1986. – 5. Auflage
- [47] NOWAKI, H. ; SHARMA, S.D.: Free surface effects on hull propeller interaction. In: *9th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics* Paris, 1970, S. 1845–1953
- [48] PATANKAR, S. V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York : McGraw-Hill, 1980
- [49] PATANKAR, S.V. ; SPALDING, D.B.: A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (1972), S. 1787–1806
- [50] PATEL, V. C. ; RODI, W. ; SCHEUERER, G.: Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows. In: *AIAA Journal* 23 (1985), September, Nr. 9, S. 1308
- [51] PRANDTL, L.: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 5 (1925), S. 136–139
- [52] RIDER, W.J. ; KOHTE, D.B.: Stretching and Tearing Interface Tracking Methods / Los Alamos National Laboratory. 1995. – Forschungsbericht
- [53] RIDER, W.J. ; KOHTE, D.B. ; JAY MOSSO, S. ; CERUTTI, J.H. ; HOCHSTEIN, J.I: Accurate Solution Algorithms for Incompressible Multiphase Flows / AIAA. 1995 (AIAA-95-0699). – Forschungsbericht
- [54] ROE, P.L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. In: *Journal of Computational Physics* 43 (1981), S. 357–372

-
- [55] SCHADE, E. ; EWALD, K.: *Strömungslehre*. Berlin : Walter de Gruyter, 1980
- [56] SCHÄFER, M.: *Numerik im Maschinenbau*. Springer Verlag, 1999. – 1. Edition
- [57] SCHETZ, J. A. ; FAVIN, S.: Numerical solution for the near wake of a body with propeller. In: *Journal of Hydronautics* 11 (1977), S. 136–141
- [58] SCHETZ, J. A. ; FAVIN, S.: Numerical solution of a body-propeller combination flow including swirl and comparisons with data. In: *Journal of Hydronautics* 13 (1979), S. 46–51
- [59] SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht Theorie*. Karlsruhe : Verlag G. Braun, 1982. – 8. Auflage
- [60] SCHROEDER, W. ; MARTIN, K. ; LORENSEN, B.: *The Visualization Tool Kit*. Prentice Hall PTR, 1998. – 2nd Edition
- [61] SCHWEIGHOFER, T.: Private Kommunikation. (1999)
- [62] SMILJANOVSKI, V.: *Ein numerisches Verfahren zur Berechnung schneller Vormischflammen und der Deflagrations-Deflagrations-Transition (DDT)*, RWTH Aachen, Dissertation, 1996
- [63] SPEZIALE, C.G. ; THANGAM, S.: Analysis of an rng based turbulence model for separated flows. In: *International Journal of Engineering Science* 10 (1992), S. 1379–1388
- [64] SPURK, J. H.: *Strömungslehre*. Berlin : Springer Verlag, 1996. – 4. Auflage
- [65] STERN, F. ; KIM, H.T. ; PATEL, V.C. ; CHEN, H.C.: A viscous flow approach to the computation of propeller-hull interaction. In: *Journal of Ship Research* 32 (1988), S. 246–262
- [66] STROUSTRUP, B.: *The C++ Programming Language*. Addison-Wesley Longman, 1997. – 3. Edition
- [67] SUSSMAN, M. ; SMEREKA, P. ; OSHER, S.: A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow. In: *Journal of Computational Physics* 114 (1994), S. 146–159
- [68] THOMPSON, J. F.: Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics. In: *AIAA Journal* 22 (1984), November, S. 1505–1523
- [69] THOMPSON, J. F. ; WARSI, Z.U.A. ; WAYNE MASTIN, C.: *Numerical Grid Generation - Foundations and Applications*. North-Holland, 1985
- [70] TRAN, L. ; VILSMEIER, R. ; HÄNEL, D.: A local level set method for the treatment of discontinuities for general grids. In: *Proceedings of Second International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications* Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, 1999, S. 849–856

- [71] VAN DOORMAL, J.P. ; RAITHBY, G.D: Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow. In: *Journal of Numerical Heat Transfer* 7 (1984), S. 147–163
- [72] VAN LEER, B.: Flux-vector splitting for the Euler equation. In: *Lecture Notes in Physics* 170 (1982), S. 507
- [73] VILSMEIER, R.: *Lösung der Erhaltungsgleichungen auf unstrukturierten Gittern*, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Dissertation, 1996
- [74] VIOZAT, C.: Implicit upwind schemes for low Mach number compressible flows / Rapport de recherche. 1997 (3084). – Forschungsbericht
- [75] WILCOX, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*. La Cañada, California : DCW Industries, Inc., 1993
- [76] WILCOX, D.C: A Half Century Historical Review of the $K - \omega$ Model. In: *AIAA Paper* 91-0615 (1991)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kontrollvolumen	3
2.2	Konvergenzverhalten bei verschiedenen β -Werten	13
4.1	Diskretisierungskonzepte: Zellzentriert und Zelleckzentriert	32
4.2	Diskretisierungskonzepte: knotenzentriert 2D/ 3D	33
4.3	Randflussformulierung halber Kontrollvolumina	33
4.4	Extrapolation der Variablenwerte q auf die Kontrollvolumengrenze . . .	36
4.5	MUSCL Extrapolation auf strukturiertem, nichtorthogonalem Gitter . .	37
5.1	Position der freien Oberfläche im Integrationsgitter	43
5.2	Skizze zur Upwindformulierung für die Level-Set-Funktion	44
5.3	Bezeichnungen zur Normalisierung	47
5.4	Lokalisierung der freien Oberfläche durch Interpolation	47
5.5	Veranschaulichung der Bezeichnungen zur inneren Druckrandbedingung	49
6.1	Skizze der Propellerscheibe	54
6.2	Bestimmung des Durchstoßungspunktes und des Tangentenvektors . . .	55
6.3	Verteilung der Impulsquellen über Wichtung auf die Knotenpunkte . .	55
6.4	Propellersimulation, Axialkraft	56
6.5	Propellersimulation, Axial- und Tangentialkraft	56
7.1	Block Splitting für die Konfiguration im beschränkten Fahrwasser . . .	59
7.2	Hybrides Gitter des Testrumpfes in der Gesamtansicht	60
7.3	Spitzer Wasserlinieneinlauf, Gittergenerierung	61
7.4	Fortführung der Prismenschichten, Gittergenerierung	61
7.5	Aufweitung der Prismenschichten, Gittergenerierung	62
7.6	Übergangselemente (Pyramiden) Prismenschicht – Tetraeder	62
8.1	Modularer Aufbau der MOUSE-Bibliothek	64
8.2	Beispiel zur Datenabstraktion	66
8.3	Beispiel zur Klassenvererbung	68
8.4	MCL- interpretierbare Skriptsprache	70
8.5	Skizze zur Flussberechnung	71
8.6	Verwendbare Kalkulatoren	72
8.7	Klassenbaumerweiterung für künstlich kompressible Strömungen	75
9.1	Koordinatensystem und Schiffskonfiguration	78
9.2	Spantenriss des Wigley-Rumpfes	79

9.3	Berechnungsgitter Doppelmodell, Wigley-Rumpf	80
9.4	Berechneter Druckwiderstandskoeffizient, Doppelmodell	80
9.5	Berechnete dynamische Druckverteilung an der Schwimmwasserlinie . .	81
9.6	Berechnete dynamische Druckverteilung an der freien Oberfläche . . .	82
9.7	Berechnete Wellenerhebung, $Fr = 0.25$	83
9.8	Berechnete Wellenwiderstandsbeiwerte C_W , C_T	83
9.9	Berechnete dyn. Druckverteilung an der Oberfläche, $Fr = 0.25$, $h/T = 2.0$	84
9.10	Berechnete Wellenerhebung, beschränktes Fahrwasser $Fr = 0.25$, $h/T = 2.0$	84
9.11	Berechnete Wellenwiderstandsbeiwerte C_W , $h/T = 2.0$	85
9.12	Berechnete Wellenwiderstandsbeiwerte C_W , Konvergenzverhalten . . .	85
9.13	Berechnete Widerstandsbeiwerte C_{VP} , C_F , $Re = 5.53 \cdot 10^6$	86
9.14	Berechnete spezifische turbulente kinetische Energie, $Re = 5.53 \cdot 10^6$.	87
9.15	Berechnete Widerstandsbeiwerte C_P , C_F , $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$.	87
9.16	Berechnete dyn. Druckverteilung, Tiefwasser, $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$	88
9.17	Berechnete dynamische Druckverteilung, beschränktes Fahrwasser . .	88
9.18	Berechnete Wellenerhebung im unbeschränkten Fahrwasser, $Fr = 0.25$, $Re = 5.53 \cdot 10^6$	89
9.19	Berechnete Wellenerhebung, beschränktes Fahrwasser, $Fr = 0.25$, $Re =$ $5.53 \cdot 10^6$	89
9.20	Berechnungsgitter für die Referenzform, Gesamtansicht	91
9.21	Berechnete Oberflächenverformung, stationäre Lösung	92
9.22	Berechnete Oberflächenverformung, Konturdarstellung im Vergleich mit dem Modellversuch, stationäre Lösung	92
9.23	Berechnete Druckverteilung am Kanalboden, Konturdarstellung im Vergleich mit dem Modellversuch, stationäre Lösung	93
9.24	Berechnete Druckverteilung am Schiffsheck im Vergleich mit dem Mo- dellversuch	93
9.25	Quantitativer Vergleich der Wellenprofile	94
9.26	Berechnete Druckverteilung am Schiffsheck mit Propellermodell	96
9.28	Berechnete Druckverteilung am Schiffsheck mit Propellermodell	97
9.27	Berechnete Druckverteilung am Schiffsheck mit Propellermodell, Strom- liniendarstellung	97
9.29	Schema des Wellenbilds bei überkritischer Geschwindigkeit	99
9.30	Spantenriss und Spantarealkurve	100
9.31	Gemessener spezifischer Gesamtwiderstand	101
9.32	Vergleich des gemessenen Restwiderstandes mit dem berechneten Wel- lenwiderstand im schmalen Kanal	103
9.33	Perspektivische Darstellung des simulierten Wellenbilds im Entwurfs- zustand	103
9.34	Gemessene Wellenprofile bei Entwurfs-Tiefen-Froude-Zahl $Fr_h = 1.414$	104
9.35	Wellenprofile im schmalen Kanal bei $Fr_h = 1.414$	105
A.1	Diskretes Kontrollvolumen und Koordinatensystem	121

A

A.1 Verwendete Symbole

Griechische Buchstaben

Symbol	Name
α	Wichtungsparameter, Runge-Kutta-Koeffizienten
β	Kompressibilitätsparameter
δ_{jk}	Kronecker Symbol
ε	spezifische Dissipationsrate
κ	Isentropenexponent
λ	Wärmeleitfähigkeit, Eigenwerte, Maßstab
Λ	Matrix der dimensionslosen Eigenwerte
η	dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität
ν_t	turbulente Viskosität
∇	Gradient, Verdrängung
ω	spezifische Dissipationsrate
Ω	Wirbelstärke
ξ, η, ζ	allgemeine Koordinaten
ρ	Dichte
σ_{jk}	viskose Spannungen
$\sigma_{k1,2}, \sigma_{\omega 1,2}, \beta_{1,2}$	Konstanten des $k - \omega$ -Turbulenzmodells
τ_w	Wandschubspannung
ψ	skalare Level-Set Funktion
Ψ	Stromfunktion
ζ	dimensionslose Wellenerhebung

Lateinische Buchstaben

Symbol	Name
a	Schallgeschwindigkeit
A	Fläche
\mathbf{A}	Roe-Matrix
B	Schiffsbreite
c	künstliche Schallgeschwindigkeit
$m_{1...6}$	Metrikoeffizienten
C	Courant Zahl
C_B	Blockkoeffizient
C_F	Reibungswiderstandsbeiwert
C_M	Hauptspannvölligkeit
C_P	Druckwiderstandsbeiwert
C_{VP}	Viskoser Druckwiderstandsbeiwert
C_T	Gesamtwiderstandsbeiwert, Schubbelastung
C_W	Wellenwiderstandsbeiwert
$C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	Konstanten des Turbulenzmodells
e	spezifische Energie
$\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$	konvektive Flüsse
$\hat{E}_{vis}, \hat{F}_{vis}, \hat{G}_{vis}$	viskose Flüsse
f	äußere Volumenkraft
$f_{bx}^*, f_{b\phi}^*$	dimensionslose Verteilungsfunktionen
f_ν, f_1, f_2	Dämpfungsterme
Fr	Froude-Zahl
Fr_h	Tiefen-Froude-Zahl
F_{vol}	Vektor der Volumenkräfte
\vec{g}	Erdbeschleunigung
G	LES Filterfunktion
\vec{H}	allgemeiner Flussvektor
h	Wassertiefe
J	Jacobi'sche Funktionaldeterminante, Propeller-Fortschrittsgrad
k	spezifische turbulente kinetische Energie
K_i	Kante im Gitter
K_Q	Momentenbeiwert
L	Schiffslänge, lineare Operatoren
L_T	turbulentes Längenmaß
l_m	Mischungslänge
$m_{1...6}$	Metrikoeffizienten
M_{nk}	künstliche Mach-Zahl
\vec{m}_{ij}	Kantenvektor $i \rightarrow j$

Symbol	Name
n	Propellerdrehrate
\vec{n}	Normalenvektor
p	Druck
P_i	Knoten im Gitter
\tilde{p}	dimensionsloser hydrodynamischer Druck
Pr_k, Pr_ε	Konstanten des Turbulenzmodells
\mathbf{P}	Produktion turbulenter kinetischer Energie
Pr	Prandtl-Zahl
q	allgemeine Strömungsgröße
Q	Propellerdrehmoment
\vec{Q}	Vektor der Erhaltungsgrößen
r	Propellerkoordinate
R	spezifische Gaskonstante
Re	Reynolds-Zahl
\mathbf{R}	Eigenvektormatrix
R_{ij}	Reynolds-Spannungen
R_p, R_h	Propellerdurchmesser, Nabendurchmesser
S	benetzte Rumpfoberfläche, Schaltfunktion
\vec{S}	Vektor der turbulenten Quellterme
t	Zeit
T	Temperatur, Tiefgang, Propellerschub
T_u	Turbulenzgrad
τ	Zeitintervall
x_i	kartesische Koordinate in Richtung i
x, y, z	kartesische Koordinaten
y^+	dimensionsloser Wandabstand
u^+	dimensionslose tangentielle Geschwindigkeit
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
U	ungestörte Anströmgeschwindigkeit, Schiffsgeschwindigkeit
$\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$	dimensionslose kontravariante Geschwindigkeitskomponenten
v_i	Geschwindigkeitskomponente in kartesischer Richtung i
V	Volumen
w	Kanalbreite

A.2 Erhaltungsgleichungen in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \vec{E}_{vis}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_{vis}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}_{vis}}{\partial z} + \vec{S} \right) \quad (\text{A.1})$$

Mit dem Vektor der Variablen \vec{Q} , den konvektiven Flußvektoren $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$, den diffusiven Flußvektoren $\vec{E}_{vis}, \vec{F}_{vis}, \vec{G}_{vis}$, den Vektor der dissipativen Terme \vec{S} :

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ u \\ v \\ w \\ k \\ \varepsilon \end{bmatrix} ; \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} u \\ uu + \tilde{p} \\ uv \\ uw \\ uk \\ u\varepsilon \end{bmatrix} ; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} v \\ vu \\ vv + \tilde{p} \\ vw \\ vk \\ v\varepsilon \end{bmatrix} ; \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} w \\ wu \\ wv \\ ww + \tilde{p} \\ wk \\ w\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 + \nu_t^*) \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ (1 + \nu_t^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (1 + \nu_t^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ (1 + \gamma^* \nu_t^*) \frac{\partial k}{\partial x} \\ (1 + \gamma \nu_t^*) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{bmatrix} ; \quad \vec{F}_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 + \nu_t^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (1 + \nu_t^*) \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ (1 + \nu_t^*) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ (1 + \gamma^* \nu_t^*) \frac{\partial k}{\partial y} \\ (1 + \gamma \nu_t^*) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\vec{G}_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 + \nu_t^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ (1 + \nu_t^*) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ (1 + \nu_t^*) \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ (1 + \gamma^* \nu_t^*) \frac{\partial k}{\partial z} \\ (1 + \gamma \nu_t^*) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{bmatrix} ; \quad \vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{P} - c_\mu k \varepsilon Re \\ \alpha_k^\varepsilon \mathbf{P} - c_\beta \varepsilon^2 Re \end{bmatrix}$$

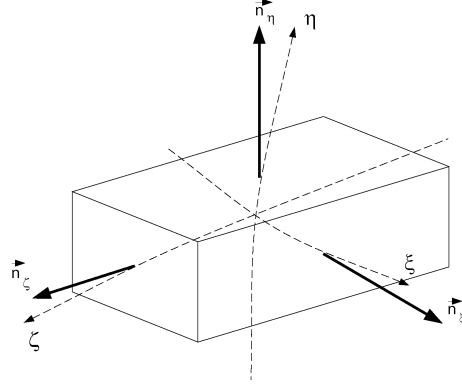


Abb. A.1: Diskretes Kontrollvolumen und Koordinatensystem

A.3 Erhaltungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten

Bei Anwendung nichtorthogonaler, randangepasster Gitter werden die Erhaltungsgleichungen für die Diskretisierung in allgemeine, krummlinige Koordinaten

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad , \quad \eta = \eta(x, y, z) \quad , \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

transformiert. Damit lassen sich die mit den Bezugsgrößen L (Schiffslänge), U (ungestörte Anströmgeschwindigkeit), und ρ (Fluidichte) dimensionslos gemachten und mit dem $k - \varepsilon$ Turbulenzmodell (3.23)-(3.24) ergänzten Erhaltungsgleichungen (3.10)-(3.11) in untenstehender, kompakter Form schreiben.

Hierbei ist $\tilde{p} = p + \frac{y}{Fr^2}$ der hydrodynamische Druck als Differenz zwischen piezometrischem Druck p und lokalem hydrostatischen Druck mit y als Koordinate in entgegengesetzter Erdbeschleunigungsrichtung. Die Froude- bzw. Reynoldszahlen sind definiert durch $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ bzw. $Re = \frac{UL}{\nu}$.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{E}_{vis}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_{vis}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}_{vis}}{\partial \zeta} + \hat{S} \right) \quad (A.2)$$

Mit den Vektoren:

$$\hat{Q} = J \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \\ k \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{E} = J \begin{pmatrix} \beta^2 \hat{U} \\ u \hat{U} + \xi_x \tilde{p} \\ v \hat{U} + \xi_y \tilde{p} \\ w \hat{U} + \xi_z \tilde{p} \\ k \hat{U} \\ \varepsilon \hat{U} \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{F} = J \begin{pmatrix} \beta^2 \hat{V} \\ u \hat{V} + \eta_x \tilde{p} \\ v \hat{V} + \eta_y \tilde{p} \\ w \hat{V} + \eta_z \tilde{p} \\ k \hat{V} \\ \varepsilon \hat{V} \end{pmatrix}$$

$$\hat{G} = J \begin{pmatrix} \beta^2 \hat{W} \\ u\hat{W} + \zeta_x \tilde{p} \\ v\hat{W} + \zeta_y \tilde{p} \\ w\hat{W} + \zeta_z \tilde{p} \\ k\hat{W} \\ \varepsilon \hat{W} \end{pmatrix} ; \quad \hat{S} = J \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\mathbf{P}} - C_\mu k \varepsilon Re \\ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \hat{\mathbf{P}} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} Re \end{pmatrix}$$

$$\hat{E}_{vis} = J \begin{pmatrix} 0 \\ [1 + \nu_t^*] [m_1 u_\xi + m_2 u_\eta + m_3 u_\zeta + c_1 \xi_x + c_2 \eta_x + c_3 \zeta_x] \\ [1 + \nu_t^*] [m_1 v_\xi + m_2 v_\eta + m_3 v_\zeta + c_1 \xi_y + c_2 \eta_y + c_3 \zeta_y] \\ [1 + \nu_t^*] [m_1 w_\xi + m_2 w_\eta + m_3 w_\zeta + c_1 \xi_z + c_2 \eta_z + c_3 \zeta_z] \\ [1 + \gamma^* \nu_t^*] [m_1 k_\xi + m_2 k_\eta + m_3 k_\zeta] \\ [1 + \gamma \nu_t^*] [m_1 \varepsilon_\xi + m_2 \varepsilon_\eta + m_3 \varepsilon_\zeta] \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}_{vis} = J \begin{pmatrix} 0 \\ [1 + \nu_t^*] [m_2 u_\xi + m_4 u_\eta + m_5 u_\zeta + c_4 \xi_x + c_5 \eta_x + c_6 \zeta_x] \\ [1 + \nu_t^*] [m_2 v_\xi + m_4 v_\eta + m_5 v_\zeta + c_4 \xi_y + c_5 \eta_y + c_6 \zeta_y] \\ [1 + \nu_t^*] [m_2 w_\xi + m_4 w_\eta + m_5 w_\zeta + c_4 \xi_z + c_5 \eta_z + c_6 \zeta_z] \\ [1 + \gamma^* \nu_t^*] [m_2 k_\xi + m_4 k_\eta + m_5 k_\zeta] \\ [1 + \gamma \nu_t^*] [m_2 \varepsilon_\xi + m_4 \varepsilon_\eta + m_5 \varepsilon_\zeta] \end{pmatrix}$$

$$\hat{G}_{vis} = J \begin{pmatrix} 0 \\ [1 + \nu_t^*] [m_3 u_\xi + m_5 u_\eta + m_6 u_\zeta + c_7 \xi_x + c_8 \eta_x + c_9 \zeta_x] \\ [1 + \nu_t^*] [m_3 v_\xi + m_5 v_\eta + m_6 v_\zeta + c_7 \xi_y + c_8 \eta_y + c_9 \zeta_y] \\ [1 + \nu_t^*] [m_3 w_\xi + m_5 w_\eta + m_6 w_\zeta + c_7 \xi_z + c_8 \eta_z + c_9 \zeta_z] \\ [1 + \gamma^* \nu_t^*] [m_3 k_\xi + m_5 k_\eta + m_6 k_\zeta] \\ [1 + \gamma \nu_t^*] [m_3 \varepsilon_\xi + m_5 \varepsilon_\eta + m_6 \varepsilon_\zeta] \end{pmatrix}$$

Die in den transformierten Gleichungen auftretenden Größen \hat{U}, \hat{V} und \hat{W} sind die kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten, die wie folgt definiert sind:

$$\hat{U} = u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z \quad ; \quad \hat{V} = u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z \quad ; \quad \hat{W} = u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z$$

Die Abkürzungen $m_{1...6}$ und $c_{1...9}$ stellen Kombinationen der Metrifaktoren dar, welche sich bei der krummlinigen Transformation von Ableitungen höherer Ordnung ergeben. Sie lauten:

$$\begin{aligned} m_1 &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 & m_2 &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z & m_3 &= \xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z \\ m_4 &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 & m_5 &= \eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z & m_6 &= \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 \\ c_1 &= u_\xi \xi_x + v_\xi \xi_y + w_\xi \xi_z & c_2 &= u_\eta \xi_x + v_\eta \xi_y + w_\eta \xi_z & c_3 &= u_\zeta \xi_x + v_\zeta \xi_y + w_\zeta \xi_z \\ c_4 &= u_\xi \eta_x + v_\xi \eta_y + w_\xi \eta_z & c_5 &= u_\eta \eta_x + v_\eta \eta_y + w_\eta \eta_z & c_6 &= u_\zeta \eta_x + v_\zeta \eta_y + w_\zeta \eta_z \\ c_7 &= u_\xi \zeta_x + v_\xi \zeta_y + w_\xi \zeta_z & c_8 &= u_\eta \zeta_x + v_\eta \zeta_y + w_\eta \zeta_z & c_9 &= u_\zeta \zeta_x + v_\zeta \zeta_y + w_\zeta \zeta_z \end{aligned}$$

Der krummlinig transformierte Produktionsterm $\hat{\mathbf{P}}$ ergibt sich aus der Transformation der einzelnen Ableitungen zu:

$$\hat{\mathbf{P}} = \nu_t \left[2 \left(\hat{u}_x^2 + \hat{v}_y^2 + \hat{w}_z^2 \right) + (\hat{u}_y + \hat{v}_x)^2 + (\hat{u}_z + \hat{w}_x)^2 + (\hat{v}_z + \hat{w}_y)^2 \right]$$

mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + f_\zeta \zeta_x \\ \hat{f}_y &= f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + f_\zeta \zeta_y \\ \hat{f}_z &= f_\xi \xi_z + f_\eta \eta_z + f_\zeta \zeta_z \end{aligned} \right\} \quad f = (u, v, w)$$

und den Metrikfaktoren:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{J} (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) & \eta_x &= \frac{1}{J} (z_\xi y_\zeta - z_\zeta y_\xi) & \zeta_x &= \frac{1}{J} (y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta) \\ \xi_y &= \frac{1}{J} (z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta) & \eta_y &= \frac{1}{J} (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) & \zeta_y &= \frac{1}{J} (z_\xi x_\eta - x_\xi z_\eta) \\ \xi_z &= \frac{1}{J} (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) & \eta_z &= \frac{1}{J} (y_\xi x_\zeta - y_\zeta x_\xi) & \zeta_z &= \frac{1}{J} (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) \end{aligned}$$

mit der Determinanten der Jacobi'schen Matrix

$$J = x_\xi (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta (z_\xi y_\zeta - z_\zeta y_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta) \quad (\text{A.3})$$